Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

ÜBUNGSBLATT 8

Abgabe am 17.12.2008 vor der Vorlesung (bis 13.10 Uhr)

Aufgabe 1. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in L^1(\mu)$. Dann ist

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto \int_A |f| \, d\mu \in \mathbb{R}$$

ein endliches Maß auf $\mathcal{A}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2. Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar über dem Würfel W_R, $R > 0$. Für jede Wahl einer Folge $(x^{ni})_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ i=1,\ldots,2^{nm}}}$, $x^{ni} \in W_R^{ni}$ gilt dann

$$\int_{W_R} f(x) \, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{2^{mn}} f(x^{ni}) 2^{-nm}.$$

Die rechts stehenden Summen heißen Riemann-Summen.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für $f \in L^1(\mathbb{R}^{m+1}, \lambda^{m+1})$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^{m+1}} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f_{x_{m+1}} \, d\lambda^m \right) \, dx_{m+1}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 4. Berechnen Sie die folgenden mehrfachen Integrale:

$$a) \quad \int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3} \, dydx, \qquad b) \quad \int_0^1 \int_y^1 \sin\, x^2 \, dxdy.$$

(je 2 Punkte)

Aufgabe 5.

a) Sei $f(x, y) = -2y \ln\, x$. Drücken Sie das Integral von f über der durch $y = 4 - x^2$ und $y = 4 - x$ eingeschlossenen Fläche als ein mehrfaches Integral aus und berechnen Sie dieses.

b) Sei $f(x,y) = \frac{y}{1+x^2}$. Drücken Sie das Integral von f über der durch $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, und $x = 4$ eingeschlossenen Fläche als ein mehrfaches Integral aus und berechnen Sie dieses.

(3+2 Punkte)

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis3.html