**Humboldt-Universität zu Berlin**
**Institut für Mathematik**
Prof. Dr. Jochen Brüning
Vorlesung Analysis IIIa, WS 2008/09

# ÜBUNGSBLATT 11

Abgabe am 21.01.2009 vor der Vorlesung (bis 13.10 Uhr)

**Aufgabe 1.** Sei $[a,b]$ ein Interval, sei $F : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F \in L^1([a,b] \times \mathbb{R})$ und $F$ partiell differenzierbar und seien $g_+,\ g_- \in C^1([a,b])$ mit $g_+ \geq g_-$.

Zeigen Sie, dass für alle $x \in (a,b)$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{g_-(x)}^{g_+(x)} F(x,t)dt \quad = \quad & \int_{g_-(x)}^{g_+(x)} \frac{\partial}{\partial x}F(x,t)dt \\ & + F(x,g_+(x))g_+'(x) - F(x,g_-(x))g_-'(x).\end{aligned}$$

Hinweis: Satz 7.8.22 und der Hauptsatz.

**(5 Punkte)**

**Aufgabe 2.** Sei $X$ ein metrischer Raum. Für $x_0 \in X$ bezeichne $\pi_1(X,x_0)$ die in der Vorlesung definierte Menge der Äquivalenzklassen von geschlossenen Wegen durch $x_0 \in X$. Zeigen Sie, dass $(\pi_1(X,x_0),*)$ eine Gruppe bildet.

Hinweis: Finden Sie geeignete Homotopien.

**(6 Punkte)**

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie, dass $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ t\ \cos\frac{\pi}{t}, & t \in (0,1] \end{cases}$$

stetig ist. Zeigen Sie ferner, dass $g \notin BV([0,1])$, indem Sie Zerlegungen der Form $\left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\right\}$ von $[0,1]$ betrachten.

**(3+3 Punkte)**

**Aufgabe 4.** Betrachten Sie den für $\alpha > 0$ durch

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) := \begin{cases} (0,0), & t = 0 \\ (t, t^\alpha \sin\frac{1}{t}), & t \in (0,1] \end{cases}$$

gegebenen Weg. Für welche $\alpha > 0$ ist $\gamma$ rektifizierbar?

**(3 Punkte)**

Für weitere Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter siehe
http://www.math.hu-berlin.de/~geomanal/analysis3.html