Ferner

$$\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = \frac{2n\cdot 2n \cdots 4\cdot 4\cdot 2\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-1)\cdots 3\cdot 3\cdot 1}\cdot\frac{2}{\pi}$$

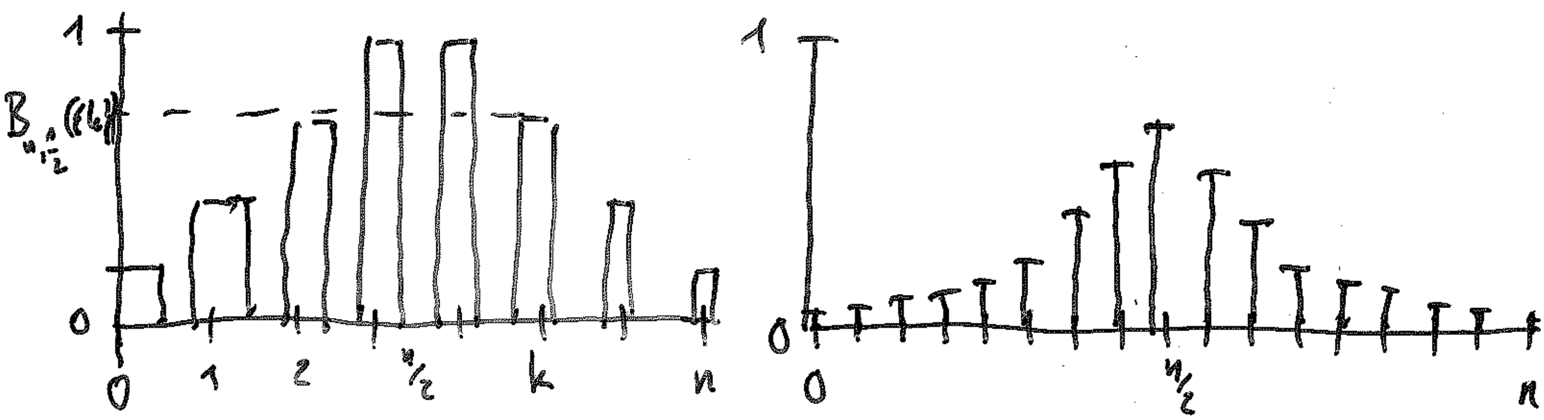
$$= \cancel{2^{2n}(n!)^2} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{(4k^2-1)}\cdot\frac{2}{\pi}.$$

Also

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}\cdot\frac{2}{\pi}=1.$$ ⌟

<u>Ziel:</u> Approximation von $B_{n,\frac{1}{2}}(\{k\})$, $0\le k\le n$;

$$B_{n,\frac{1}{2}}(\{k\}) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad 0\le k\le n.$$



Die Verteilungen sind symmetrisch bzgl. $\frac{n}{2}$, mit wachsendem n werden die Verteilungen "breiter".

Daher Standardisierung: sei S_n ZV mit Verteilung $B_{n,\frac{1}{2}}$.

Betrachte statt S_n

$$S_n^* = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Standardisiere auch Werteberich k, $0 \le k \le n$:

$$x_n(k) = \frac{k - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}, \qquad 0 \le k \le n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Ziel: Approximation von $B_{n,\frac{1}{2}}(\{k\}) = \mathbb{P}(S_n = k)$

$$= \mathbb{P}(S_n^* = x_n(k)),$$

$0 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$ und $n \to \infty$, so daß $|x_n(k)| \le c$ mit $c > 0$.

Es gilt: $\frac{k}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x_n(k)}{\sqrt{n}}\right)$, $0 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$.

Aus der Stirling-Formel:

$$\mathbb{P}(S_n^* = x_n(k)) = \binom{n}{k}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,2^{-n}$$

$$\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{(n-k)k}}\;\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}\,2^{-n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{n}{(n-k)k}}\left(\frac{n}{k}\right)^k\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} 2^{-n}$$

gleichmäßig in k mit $|x_n(k)| \le c$.

Gleichmäßig in k mit $|x_n(k)| \le c$ gilt:

$$\frac{k(n-k)}{n} = n \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{n-k}{n} = \frac{n}{4}\left(1+\frac{x_n(k)}{\sqrt{n}}\right)\left(1-\frac{x_n(k)}{\sqrt{n}}\right)$$
$$\sim \frac{n}{4}\,.$$

Ferner

$$\ln\left[\left(\frac{k}{n}\right)^k\left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}\cdot 2^n\right] = k \ln\frac{2k}{n} + (n-k)\ln\frac{2(n-k)}{n}$$

$$= n\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{x_n(k)}{\sqrt{n}}\right)\ln\left(1+\frac{x_n(k)}{\sqrt{n}}\right) + \frac{n}{2}\left(1-\frac{x_n(k)}{\sqrt{n}}\right)\cdot$$
$$\cdot\ln\left(1-\frac{x_n(k)}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(1+\frac{x_n(k)}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{x_n(k)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{x_n(k)^2}{n} + O(n^{-3/2})\right)$$

$$+ \frac{n}{2}\left(1-\frac{x_n(k)}{\sqrt{n}}\right)\left(-\frac{x_n(k)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{x_n(k)^2}{n} + O(n^{-3/2})\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(\frac{x_n(k)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{x_n(k)^2}{n} + \frac{x_n(k)^2}{n} + O(n^{-3/2})\right)$$

$$+ \frac{n}{2}\left(-\frac{x_n(k)}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{x_n(k)^2}{n} + \frac{x_n(k)^2}{n} + O(n^{-3/2})\right)$$

$$= \frac{x_n(k)^2}{2} + O(n^{-1/2})$$

Insgesamt: für k mit $|x_n(k)| \le c$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$B_{n,\frac{1}{2}}(\{k\}) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\cdot\exp\left(-\frac{x_n(k)^2}{2}\right).$$

Sei $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$, $x \in \mathbb{R}$.

<u>Thm 4:</u> "de Moivre-Laplace (1733/1812)"

Sei $c > 0$. Dann gilt mit $x_n(k) = \frac{k - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}$, $0 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{|x_n(k)| \le c} \left| \frac{B_{n,\frac{1}{2}}(\{k\})}{\varphi(x_n(k))} \sqrt{\frac{n}{4}} - 1 \right| = 0.$$

<u>Def:</u> Sei $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Das W. maß $N_{\mu,\sigma}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ mit Dichtefunktion

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

heißt "<u>Normalverteilung</u>" oder "<u>Gauß-Verteilung</u>" mit Erwartungswert μ, Varianz σ^2. $N_{0,1}$ heißt "<u>Standard-normalverteilung</u>".

<u>Kor 1:</u> Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \le S_n^* \le b) = \int_a^b \varphi(x)\,dx = \phi(b) - \phi(a),$$

wenn $\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp(-\frac{x^2}{2})\,dx = \int_{-\infty}^{y} \varphi(x)\,dx$.

ϕ "VF" der Standardnormalverteilung.

<u>Bew:</u> Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\sigma_n = \sqrt{\frac{n}{4}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $n \geq n_0$

$$\max_{k:\ a \leq x_n(k) \leq b} \left| \frac{\varphi(x_n(k))}{\sigma_n\ B_{n,\frac{1}{2}}(\{k\})} - 1 \right| < \varepsilon.$$

(Thm 4).

Also

$$\left| \mathbb{P}(a \leq S_n^* \leq b) - \sum_{k:\ a \leq x_n(k) \leq b} \frac{1}{\sigma_n} \varphi(x_n(k)) \right|$$

$$= \left| \sum_{k:\ a \leq x_n(k) \leq b} \left[\mathbb{P}(S_n^* = x_n(k)) - \frac{1}{\sigma_n} \varphi(x_n(k)) \right] \right|$$

$$= \left| \sum_{k:\ a \leq x_n(k) \leq b} \left[B_{n,\frac{1}{2}}(\{k\}) - \frac{1}{\sigma_n} \varphi(x_n(k)) \right] \right|$$

$$= \left| \sum_{k:\ a \leq x_n(k) \leq b} B_{n,\frac{1}{2}}(\{k\}) \left[1 - \frac{\varphi(x_n(k))}{B_{n,\frac{1}{2}}(\{k\}) \cdot \sigma_n} \right] \right|$$

$$\leq \varepsilon \cdot \sum_{k:\ a \leq x_n(k) \leq b} B_{n,\frac{1}{2}}(\{k\}) \leq \varepsilon, \text{ für } n \geq n_0.$$

Berücksichtige, daß $\sum_{k:\ a \leq x_n(k) \leq b} \frac{1}{\sigma_n} \varphi(x_n(k))$ Riemann-Summe von $\int_a^b \varphi(x)\,dx$. $\lrcorner$

2.6 Wartezeit - Verteilungen

2.6.1. Negative Binomialverteilung

Eine Urne enthalte weiße ("1") und schwarze ("0") Kugeln. Der Anteil der weißen Kugeln sei $p = \rho(1)$, $0 < p < 1$. Wir interessieren uns für die Zeit, zu der wir r weiße Kugeln gezogen haben (bei Ziehen mit Zurücklegen) ("Zeit des r-ten Erfolgs") Mindestens r Züge. Daher besser: "Zeit des r-ten Erfolgs $- r$".

Modellierung: auf unendl. Produkt

$$\tilde{\Omega} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \quad \text{für } \omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{\Omega}$$

$$T_r(\omega) = \underbrace{\min\{k : \sum_{i=1}^{k} \omega_i = r\} - r}_{\text{"Zeit des } r\text{-ten Erfolgs } -r\text{"}}$$

Im folgenden Kapitel werden W.maße auf solchen unendl. Produkten untersucht. Für den Augenblick:

$\Omega = \mathbb{Z}_+$, $\tilde{\Omega}_n = \{0,1\}^{r+n}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$T_r^n : \tilde{\Omega}_n \to \Omega$$

$$\omega \mapsto \begin{cases} \min\{k : \sum_{i=1}^{k} w_i = r\} - r, & \text{falls } \sum_{i=1}^{n+r} w_i \geq r \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\tilde{\mathbb{P}}_n$ Bernoulli-Maß auf $\tilde{\Omega}_n$ zum Parameter p,

d.h.
$$\tilde{\mathbb{P}}_n(\{\omega\}) = p^{\sum_{i=1}^{n+r} w_i} (1-p)^{\sum_{i=1}^{n+r}(1-w_i)}.$$

Dann für $k \leq n$

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \tilde{\mathbb{P}}_n(\{T_r^n = n\})$$

$$= \tilde{\mathbb{P}}_n(\{\omega \in \tilde{\Omega}_n : \text{es gibt } S \subset \{1, \dots, n+r-1\},\ |S| = r-1 \text{ mit } w_i = 1,\ i \in S,\ \omega_{n+r} = 1,\ w_i = 0 \text{ sonst}\})$$

$$= \sum_{S \subset \{1, \dots, n+r-1\},\ |S| = r-1} p^r (1-p)^n$$

$$= \binom{n+r-1}{r-1} p^r (1-p)^n.$$

Def: Für $r > 0$, $0 \leq p < 1$, heißt das W.-maß $\bar{B}_{r,p}$ auf $(\mathbb{Z}_+, \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+))$ mit Zähldichte

$$\bar{B}_{r,p}(\{k\}) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

"negative Binomialverteilung" zu Param. r, p.

Insbesondere heißt

$$G_p(\{k\}) = p(1-p)^k \,, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

"geometrische Verteilung" zum Parameter p.

2.6.2 Gamma-Verteilungen

Zurück zum Bsp. der KfZ-Versicherung.
Bei der Herleitung der Poissonverteilung erhielten wir für die Anzahl von Schadensmeldungen im Intervall $]0,t]$ eine Poissonverteilung $P_{\alpha t}$ zum Parameter $\alpha \cdot t$, mit einer Konstanten $\alpha > 0$.

Gesucht: Modell zur Beschreibung der r-ten Schadensmeldung bei der KfZ-Versicherung.
Betrachte $\Omega =]0,\infty[$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}^1_\Omega$. Wie ist $\mathbb{P}$ zu wählen?

Bekannt: W. keit, daß im Intervall $]0,t]$ genau k Schäden gemeldet werden, gg. durch

$$P_{\alpha t}(\{k\}) = e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$$

Ansatz:

$$\mathbb{P}(]0,t]) = 1 - P_{\alpha t}(\{0,\dots,r-1\})$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{r-1} P_{\alpha t}(\{k\})$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$$
$$= \int_0^t \frac{\alpha^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\alpha x} dx, \quad t \geq 0.$$

Denn: $\mathbb{P}(]0,t])$ ist id. mit VF der ZV

$X: \Omega \to \mathbb{R}_+, \quad \omega \mapsto \omega$, d.h.

$\mathbb{P}(]0,t]) = F_X(t)$, und damit

$$F_X'(t) = -\sum_{k=0}^{r-1} \left[-\alpha \cdot \frac{(\alpha t)^k}{k!} + \alpha \cdot \frac{(\alpha t)^{k-1}}{(k-1)!} \right] e^{-\alpha t}$$
$$= \alpha \frac{(\alpha t)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\alpha t} = \alpha^r \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\alpha t}.$$

Also muß (Bem. Kap. 1) $\mathbb{P}$ das W. maß auf $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega^1)$ mit Dichte

$$\gamma_{\alpha,r}(x) = \begin{cases} \alpha^r \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

sein.

Def: Für $\alpha, r > 0$ heißt das W.-maß $\Gamma_{\alpha,r}$ auf $(]0,\infty[, \mathcal{B}^1_{]0,\infty[})$ mit Dichtefunktion

$$\gamma_{\alpha,r}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

"Gamma-Verteilung" zu Parametern α, r.

Insbesondere heißt das W.-maß $\mathcal{E}_\alpha = \Gamma_{\alpha,1}$ "Exponentialverteilung" zum Parameter α.

3. Bedingte W.-keiten und Unabhängigkeit

3.1. Bedingte W.-keiten

Bsp. 1 : "Ziehen ohne Zurücklegen"

Eine Urne enthalte s schwarze und w weiße Kugeln. Wir ziehen zweimal nacheinander ohne Zurücklegen. Die Kugeln seien numeriert:

$$\underbrace{1, \dots, w}_{\text{"weiße"}}, \underbrace{w+1, \dots, w+s}_{\text{"schwarze"}}$$

Wie groß ist die W.-keit, im zweiten Zug eine weiße Kugel zu ziehen? Wie groß ist die W.-keit, im zweiten Zug eine weiße Kugel zu ziehen, falls im ersten Zug eine weiße Kugel gezogen wurde?

Lösung: $\Omega = \{(k,\ell) : 1 \leq k,\ell \leq w+s,\ k \neq \ell\}$,

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ Gleichverteilung

$A \Leftrightarrow$ "die erste Kugel ist weiß"

$B \Leftrightarrow$ "die zweite Kugel ist weiß"

Erste Frage Variante:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \\
&= \frac{|B \cap A|}{|\Omega|} + \frac{|A^c \cap B|}{|\Omega|} \\
&= \frac{w(w-1)}{(s+w)(s+w-1)} + \frac{s \cdot w}{(s+w)(s+w-1)} \\
&= \frac{w}{s+w}
\end{aligned}$$

Zweite Variante: Heuristisch: Modellierung durch Urne mit $w-1$ weißen, s schwarzen Kugeln. Dann einmal ziehen.

$\Omega' = \{1, \ldots, w-1, w, \ldots, s+w-1\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega')$, $\mathbb{P}' = \mathcal{U}_{\Omega'}$.

$\mathbb{P}'(B) = \frac{w-1}{w+s-1}$. $\qquad B \Leftrightarrow$ "weiß im neuen Vers."

Allgemein: Durch Eintreten von A wird in Variant 2 die W. hat nun berechnet mit einem neuen W. maß $\mathbb{P}_A$. $\mathbb{P}_A$ sollte so beschaffen sein, daß

a) $\mathbb{P}_A(A) = 1$,

b) $\mathbb{P}_A(B) \sim \mathbb{P}(B)$, d.h. es gibt ein $c > 0$

mit $\mathbb{P}_A(B) = c \cdot \mathbb{P}(B)$, $B \in \mathcal{F}$, $B \subset A$.

Prop. 1: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ W. raum, $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$. Dann gibt es genau ein W. maß $\mathbb{P}_A$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit a) und b), gegeben durch

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}, \quad B \in \mathcal{F}.$$

Bew: 1. Sei $Q(B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$, $B \in \mathcal{F}$.

Dann ist Q W. maß:

i) $Q(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$;

ii) $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ p.d.; dann

$$Q\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}\Big(A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\Big) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A \cap B_n$$

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A \cap B_n) \qquad (\mathbb{P} \text{ W. maß})$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}(A\cap B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} Q(B_n).$$

a) und b) gelten mit $c = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}$.

2. Sei $\mathbb{P}_A$ W. maß mit a) und b).

Dann gilt für $B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}_A(A\cap B) + \underbrace{\mathbb{P}_A(A^c \cap B)}_{=0}$$

$$= c \cdot \mathbb{P}(A\cap B) \qquad (a))$$

Insbesondere

$$1 = \mathbb{P}_A(A) = c\cdot \mathbb{P}(A), \text{ d.h. } c = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}. \quad \lrcorner$$

Def: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ W. raum, $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$.

Dann für $B \in \mathcal{F}$

$$\underline{\mathbb{P}(B|A)} := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

"<u>bedingte W. keit von B unter der Bedingung A.</u>"

Falls $\mathbb{P}(A) = 0$, $B \in \mathcal{F}$, sei $\underline{\mathbb{P}(B|A) := 0}$.

Zurück zu Bsp. 1:

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{|B\cap A|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|B\cap A|}{|A|}$$

$$= \frac{w(w-1)}{(s+w-1)\cdot w} = \frac{w-1}{s+w-1}.$$

Bsp. 2: Situation wie in Bsp. 1. Die erste Kugel wird blind gezogen. Die zweite ist weiß. Mit welcher W.keit war die erste weiß? $A \leftrightarrow$ "1. Kugel weiß", $B \leftrightarrow$ "2. Kugel weiß"

Lösung: $$\mathbb{P}(A \mid B) = \cancel{|A\cap B|}\ \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{|A\cap B|}{|B|} = \frac{w\cdot(w-1)}{|A\cap B| + |A^c\cap B|}$$

$$= \frac{w(w-1)}{w(w-1)+sw} = \frac{w(w-1)}{w(s+w-1)}$$

$$= \frac{w-1}{s+w-1}.$$

Warnung: Man kann in der Regel bed. W.keiten nicht kausal interpretieren!

Thm 1: "Bayes"

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ W. raum, $\Omega = \bigcup_{i \in I} B_i$, $(B_i)_{i \in I}$

p.d. Zerlegung von Ω in $\mathcal{F}$, I höchstens abzählbar.

Dann

a) für $A \in \mathcal{F}$: $\quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$

b) (Formel von Bayes, 1763):

für $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$ und $k \in I$ gilt

$$\mathbb{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_k) \cdot \mathbb{P}(A \mid B_k)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}$$

Bew: a)

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i \in I} (B_i \cap A)\Big) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B_i \cap A)$$

$$= \sum_{i \in I} \frac{\mathbb{P}(B_i \cap A)}{\mathbb{P}(B_i)} \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

$$= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)$$

b) $$\mathbb{P}(B_k \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_k \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \mid B_k)\, \mathbb{P}(B_k)}{\underbrace{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}_{(a)}}.$$

Bsp. 3: "Bewertung medizinischer Verfahren"

Eine Krankheit komme bei 4 % der Bevölkerung vor. Ein diagnostisches Verfahren spreche bei 90 % der Kranken an, bei 20 % der Gesunden.

Mit welcher W.keit ist eine zufällig ausgewählte Person krank, wenn sie positiv getestet wurde? wenn sie negativ getestet wurde?

Lösung: Ω endliche Menge (z.B. $\Omega = \{1, \dots, 10000\}$), $\mathcal{F} = \mathfrak{P}(\Omega)$, $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$. Sei $B_1 \subset \Omega$ Menge der Kranken, $B_2 = B_1^c$ Menge der Gesunden. Sei A die Menge der positiv Getesteten. Dann $\mathbb{P}(B_1) = 0{,}04$, $\mathbb{P}(B_2) = 0{,}96$, $\mathbb{P}(A \mid B_1) = 0{,}9$, $\mathbb{P}(A \mid B_2) = 0{,}2$.

a) Gesucht: $\mathbb{P}(B_1 \mid A)$. Nach Bayes:

$$\mathbb{P}(B_1 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(A \mid B_1)}{\mathbb{P}(A \mid B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A \mid B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2)}$$

$$= \frac{0{,}04 \cdot 0{,}9}{0{,}9 \cdot 0{,}04 + 0{,}2 \cdot 0{,}96} = 0{,}166,$$

b) Gesucht: $\mathbb{P}(B_1 \mid A^c)$. Nach Bayes:

$$\mathbb{P}(B_1 \mid A^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c \mid B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A^c \mid B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A^c \mid B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2)} =$$

$$= \frac{0{,}1 \cdot 0{,}04}{0{,}1 \cdot 0{,}04 + 0{,}8 \cdot 0{,}96} = 0{,}005.$$

3.2. Mehrstufige Modelle

Ein Zufallsexperiment bestehe aus n Teilexperimenten, nacheinander ausgeführt. Gesucht ist ein W.raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für das Gesamtexperiment. Zufallsvariablen $(X_i)_{1 \le i \le n}$ beschreiben dabei die Teilexperimente.

Bekannt sei dabei:

a) Verteilung von X_1,

b) Verteilung von X_i, wenn $X_1, \dots, X_{i-1}$ bekannt sind, $1 \le i \le n$.

Prop. 2. "Multiplikationsformel"

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ W.raum, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2 | A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Bew: $\mathbb{P}(A_1)\, \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

$$= \mathbb{P}(A_1) \cdot \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} \cdot \frac{\mathbb{P}(A_3 \cap A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

$$= \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

$\lrcorner$

<u>Thm 2:</u> "W. maße durch bed. W. keiten"

Seien $\Omega_1, \dots, \Omega_n \neq \emptyset$ Ergebnisräume, abzählbar, $n \geq 2$.

Sei ρ_1 Zähldichte auf Ω_1, für $k \geq 2$ und $(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{k-1}$ sei $\rho_{k|\omega_1, \dots, \omega_{k-1}}$ Zähldichte auf Ω_k. Dann ex. genau ein W. maß $\mathbb{P}$ auf $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$ mit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$,

$$X_i : \Omega \to \Omega_i$$
$$(\omega_1, \dots, \omega_n) \mapsto \omega_i,$$

und den Eigenschaften

a) $\rho_1(\omega_1) = \mathbb{P}(X_1 = \omega_1)$, $\omega_1 \in \Omega_1$,

b) für $k \geq 2$ und $(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}) \in \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{k-1}$ gilt

$$\rho_{k|\omega_1, \dots, \omega_{k-1}}(\omega_k) = \mathbb{P}(X_k = \omega_k \mid X_1 = \omega_1, \dots, X_{k-1} = \omega_{k-1})$$

$\omega_k \in \Omega_k$, falls $\mathbb{P}(X_1 = \omega_1, \dots, X_{k-1} = \omega_{k-1}) > 0$.

$\mathbb{P}$ ist gegeben durch $(\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega)$

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \rho_1(\omega_1) \cdot \rho_{2|\omega_1}(\omega_2) \cdot \rho_{3|\omega_1, \omega_2}(\omega_3) \cdots \rho_{n|\omega_1, \dots, \omega_{n-1}}(\omega_n).$$

<u>Bew:</u> 1. <u>Eindeutigkeit:</u> für $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ gilt

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(X_1 = \omega_1, \dots, X_n = \omega_n)$$
$$= \mathbb{P}(X_1 = \omega_1)\, \mathbb{P}(X_2 = \omega_2 \mid X_1 = \omega_1) \dots \mathbb{P}(X_n = \omega_n \mid X_1 = \omega_1, \dots, X_{n-1} = \omega_{n-1}) \quad (\text{Prop. } 2)$$

$$= \rho_1(\omega_1)\cdot \rho_{2|\omega_1}(\omega_2)\,\rho_{3|\omega_1,\omega_2}(\omega_3)\cdots\rho_{n|\omega_1,\dots,\omega_{n-1}}(\omega_n) \quad (a_1, b_1)).$$

Also liegt $\mathbb{P}$ durch a_1 und b_1 eindeutig fest.

2. Existenz:

Sei $Q(\{\omega\}) := \rho_1(\omega_1)\cdots\rho_{n|\omega_1,\dots,\omega_{n-1}}(\omega_n)$, $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)\in\Omega$,

Dann Q W. maß: $\quad Q(A) = \sum_{\omega\in A} Q(\{\omega\})$, $A\subset\Omega$.

σ-Additivität: Definition von Q, Summierbarkeitssatz für Reihen mit positiven Folgen.

Ferner
$$Q(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} Q(\{\omega\})$$
$$= \sum_{\omega_1\in\Omega_1}\sum_{\omega_2\in\Omega_2}\cdots\sum_{\omega_n\in\Omega_n}\rho_1(\omega_1)\,\rho_{2|\omega_1}(\omega_2)\cdots\rho_{n|\omega_1,\dots,\omega_{n-1}}(\omega_n)$$
$$= \sum_{\omega_1\in\Omega_1}\cdots\sum_{\omega_{n-1}\in\Omega_{n-1}}\rho_1(\omega_1)\cdots\rho_{n-1|\omega_1,\dots,\omega_{n-2}}(\omega_{n-1})$$
$$= \cdots \sum_{\omega_1\in\Omega_1}\rho_1(\omega_1) = 1. \qquad (\rho_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}} \text{ Zähldichte})$$

Zeige: Q erfüllt a_1 und b_1. Sei $k\geq 2$, $(\omega_1,\dots,\omega_{k-1})\in\Omega_1\times\dots\times\Omega_{k-1}$. Dann gilt für $\omega_k\in\Omega_k$

$$Q(X_1=\omega_1,\dots,X_k=\omega_k) = \sum_{\omega_{k+1}\in\Omega_{k+1}}\cdots\sum_{\omega_n\in\Omega_n} Q(X_1=\omega_1,\dots,X_n=\omega_n)$$
$(Q$ W. maß$)$
$$= \sum_{\omega_{k+1}\in\Omega_{k+1}}\cdots\sum_{\omega_n\in\Omega_n} Q(\{(\omega_1,\dots,\omega_n)\})$$

$$= \sum_{\omega_{k+1} \in \Omega_{k+1}} \cdots \sum_{\omega_n \in \Omega_n} \rho_1(\omega_1) \cdots \rho_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}}(\omega_k) \cdot \cdots \rho_{k+1|\omega_1,\dots,\omega_k}(\omega_{k+1}) \cdots \rho_{n|\omega_1,\dots,\omega_{n-1}}(\omega_n)$$

$$= \rho_1(\omega_1) \cdots \rho_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}}(\omega_k)$$ (Argument wie oben)

$$= Q(X_1 = \omega_1, \dots, X_{k-1} = \omega_{k-1}) \cdot \rho_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}}(\omega_k).$$

Also nach Def.

$$Q(X_k = \omega_k \mid X_1 = \omega_1, \dots, X_{k-1} = \omega_{k-1})$$

$$= \frac{Q(X_k = \omega_k, X_{k-1} = \omega_{k-1}, \dots, X_1 = \omega_1)}{Q(X_1 = \omega_1, \dots, X_{k-1} = \omega_{k-1})} = \rho_{k|\omega_1,\dots,\omega_{k-1}}(\omega_k)$$

Die obige Rechnung für $k = 1$ ergibt

$$Q_1(X_1 = \omega_1) = \rho_1(\omega_1), \quad \omega_1 \in \Omega_1.$$

Insgesamt sind a) und b) erfüllt. ⌋

<u>Bsp. 4</u>: "Populationsgenetik"

Ein Gen im Genom einer Population besitze zwei Allele A und a. Bei diploidem Chromosomensatz gibt es drei Ausprägungen AA, Aa, aa. Sie kommen in der Population mit den Häufigkeiten u, $2v$, w vor, wobei gilt $u + 2v + w = 1$. Es gebe weder Mutation noch Selektion. Wie sieht die Genotypen-

Verteilung in der Nachkommen-Generation aus?

Lösung: $\Omega = \{AA, Aa, aa\}^3$; für $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$:

ω_1: "Genotyp Mutter"

ω_2: "Genotyp Vater" $\qquad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

ω_3: "Genotyp Nachkommen"

Konstruktion von $\mathbb{P}$: Baumdiagramm