Nichtlineare Operatorgleichungen

Joachim Naumann

Ausarbeitung und file: Adrian Petrov, Paul Gajewski

Inhaltsverzeichnis

1 Fixpunktsätze

Lineare Funktionalanalysis

Definition 1. Seien X, Y normierte Räume. Ein linearer Operator $T : X \to Y$ heißt **kompakt**, wenn T beschränkte Mengen in präkompakte Mengen abbildet, d.h.

$$M \subset X \text{ beschränkt } \Rightarrow \overline{T(M)} \text{ kompakt in } Y.$$

Eigenschaften

1. Jeder kompakte lineare Operator ist stetig.
2. Für $T : X \to Y$ linear sind äquivalent:
   (a) T ist kompakt;
   (b) $(x_k) \subset X$, $\|x_k\| \leq C = \text{const} \Rightarrow$ es ex. Teilfolge $(x_{k_l}) : Tx_{k_l} \to y$.
3. $\dim X < +\infty$, $T : X \to Y$ linear $\Rightarrow T$ kompakt.
4. $T : X \to Y$ linear, stetig, $\dim T(X) < +\infty \Rightarrow T$ kompakt.
5. Sei $\dim X = +\infty$. Dann ist I (=Identität in X) nicht kompakt.

Satz 2 (Methode der a-priori-Schranken)**.** *Seien X Banachraum, Y normierter Raum. Seien $L_0, L_1 : X \to Y$ lineare stetige Operatoren. Sei*

$$L_t := (1-t)L_0 + tL_1, \quad t \in [0,1].$$

Es gelte:

1. *für jedes $f \in Y$ existiert genau ein $u \in X$, so dass $L_0 u = f$;*
2. *es existiert c=const, so dass:*

$$\forall t \in [0,1], \forall f \in Y \text{ gilt: Wenn } u \in X,\ L_t u = f, \text{ so } \|u\|_X \leq c\,\|f\|_Y$$

   (c =const unabhängig von t und u) [a-priori-Abschätzung für mögliche Lösungen].

Dann existiert für jedes $f \in Y$ genau ein $u \in X$, so dass $L_1 u = f$.

Fixpunktsatz von Schauder

Definition 3. Seien X, Y normierte Räume, $M \subset X$. Ein Operator $T : M \to Y$ heißt **kompakt**, wenn

1. T ist stetig,
2. T bildet beschränkte Mengen $E \subset M$ in präkompakte Mengen ab.

Satz 4 (SCHAUDER)**.** *Seien X Banachraum, $M \subset X$ nichtleere, konvexe, kompakte Teilmenge und $T : M \to M$ stetig. Dann besitzt T einen Fixpunkt.*

Satz 5 (SCHAUDER)**.** *Seien X Banachraum, $M \subset X$ nichtleere, konvexe, abgeschlossene Teilmenge und $T : M \to M$ stetig. Außerdem sei $T(M)$ präkompakt. Dann besitzt T einen Fixpunkt.*

□

Fixpunktmethode von LERAY/SCHAUDER

Satz 6 (LERAY/SCHAUDER)**.** *Seien X Banachraum und $T : X \to X$ kompakt. Es existiere $r > 0$, so dass:*

$$\forall t \in [0, 1[, \forall u \in X \text{ gilt: Wenn } u \in X, u = tTu, \text{ so } \|u\| \leq r.$$

Dann besitzt T einen Fixpunkt.

□

2 Gleichungen mit Operatoren vom Typ (M)

Zuerst einige Bezeichnungen.

- Sei $(X, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ =dualer Raum von X
- $\langle u^*, v\rangle := u^*(v)$ =Wert von $u^* \in X^*$ in $v \in X$
- $\|u^*\|_* := \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle u^*, v\rangle|$

Definition 7. Eine Abbildung $A : X \to X^*$ heißt

1. **hemi-stetig**, wenn $t \mapsto \langle A(u + tv), w\rangle$ für $u, v, w \in X$ stetig ist in $\mathbb{R}$;
2. **monoton** (bzw **strikt monoton**), wenn $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X$ (bzw $\langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \quad \forall u, v \in X$);
3. **pseudo-monoton**, wenn für jede Folge $(u_k) \subset X$ mit $u_k \rightharpoonup u$ in X und $\limsup \langle Au_k, u_k - u\rangle \leq 0$ gilt, dass $\liminf \langle Au_k, u_k - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle \ \forall v \in X$;
4. **vom Typ (M)**, wenn für jede Folge $(u_k) \subset X$ mit $u_k \rightharpoonup u$ in X, $Au_k \overset{*}{\rightharpoonup} w^*$ in X^* und $\limsup \langle Au_k, u_k\rangle \leq \langle w^*, u\rangle$ gilt, dass $Au = w^*$.

Lemma 8. *Für $A : X \to X^*$ gilt:*

1. *(a) A hemi-stetig und monoton $\Rightarrow$ A pseudo-monoton;*

   (b) A pseudo-monoton $\Rightarrow$ A vom Typ (M).
2. *Sei X reflexiv. $A : X \to X^*$ sei von Typ (M). Überdies bilde A beschränkte Mengen in beschränkte Mengen ab. Dann: Für jede Folge $(u_k) \subset X$ mit $u_k \to u$ gilt $Au_k \overset{*}{\rightharpoonup} Au$.*

Beweis 1.(*a*) Sei $(u_k) \subset X$ mit $u_k \rightharpoonup u$ und $\limsup \langle Au_k, u_k - u\rangle \leq 0$. Sei $v \in X$, $t > 0$ beliebig. Definiere $w := (1 - t)u + tv = u + t(v - u)$. Da A monoton ist, folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle Au_k - Aw, u_k - w\rangle \\ &= \langle Au_k - Aw, u_k - u\rangle + \langle Au_k - Aw, t(u - v)\rangle \end{aligned}$$

Damit ergibt sich nach Umstellen:

$$t\,\langle Au_k, u - v\rangle \geq -\underbrace{\langle Au_k, u_k - u\rangle}_{\limsup \cdots \leq 0} + \left\langle \underbrace{Aw, u_k - u}_{lim\langle\ldots\rangle = 0} + t(u - v) \right\rangle.$$

Und somit folgt nach Division durch t und Grenzübergang $k \to \infty$

$$\begin{aligned} \liminf \langle Au_k, u - v\rangle &\geq \langle Aw, u - v\rangle \\ &= \langle A(u + t(u - v)), u - v\rangle . \end{aligned}$$

Da A monoton ist, gilt

$$\langle Au_k, u_k - u\rangle \geq \langle Au, u_k - u\rangle .$$

Damit:

$$\begin{aligned}\liminf \langle Au_k, u_k - v\rangle &\geq \liminf \langle Au_k, u_k - u\rangle + \liminf \langle Au_k, u - v\rangle \\ &\geq \langle A(u + t(u - v)), u - v\rangle\end{aligned}$$

für $t > 0$ und $v \in X$. Mit der Hemi-Stetigkeit von A folgt durch Grenzübergang von $t \to 0$ die Behauptung.

(b) Sei $(u_k) \subset X$ mit $u_k \rightharpoonup u$ in X, $Au_k \overset{*}{\rightharpoonup} w^*$ in X^* und $\limsup \langle Au_k, u_k\rangle \leq \langle w^*, u\rangle$. Wir zeigen $w^* = u$. Es gilt $\limsup \langle Au_k, u_k - u\rangle \leq 0$. Da A pseudo-monoton ist, gilt $\forall v \in X$: $\liminf \langle Au_k, u_k - v\rangle \geq \langle Au_k, u - v\rangle$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle Au, u - v\rangle &\leq \limsup \langle Au_k, u_k\rangle + \limsup \langle Au_k, -v\rangle \\ &\leq \langle w^*, u\rangle + \langle w^*, -v\rangle \\ &= \langle w^*, u - v\rangle .\end{aligned}$$

Für $v := u \pm z$, wobei $z \in X$ beliebig, gilt dann

$$\langle Au, z\rangle \leq \pm \langle w^*, z\rangle \Rightarrow Au = w^*.$$

2. Sei $u_k \to u$ in X. Nach Voraussetzung existiert $C_1 = konstant$ derart, dass $\|u_k\| \leq C_1$; demnach existiert nach Voraussetzung $C_2 = konstant$, so dass $\|Au_k\|_* \leq C_2$. Nun ist X reflexiv gdw X^* reflexiv. Also existiert eine Teilfolge (k_j) mit der Eigenschaft, dass

$$Au_{k_j} \overset{*}{\rightharpoonup} w^* \text{ in } X^*.$$

Es folgt also

$$\left\langle Au_{k_j}, u_{k_j}\right\rangle = \langle w^*, u\rangle .$$

Mit der Bedingung (M) gilt $Au = w^*$ und dann auch für die gesamte Folge:

$$Au_k \overset{*}{\rightharpoonup} w^* = Au.$$

□

Lemma 9. *Seien $A, B : X \to X^*$ pseudo-monoton. Dann ist auch $A + B$ pseudo-monoton.*

Beweis Sei $(u_k) \subset X$ Folge mit $u_k \rightharpoonup u$, $\limsup \langle (A + B)u_k, u_k - u\rangle \leq 0$. Behauptung: Dann gilt $\limsup \langle Au_k, u_k - u\rangle \leq 0$ und $\limsup \langle Bu_k, u_k - u\rangle \leq 0$. Annahme, es sei $\limsup \langle Au_k, u_k - u\rangle =: \alpha > 0$. Dann existiert (k_j): $\lim \left\langle Au_{k_j}, u_{k_j} - u\right\rangle = \alpha$. Fixiere $0 < \lambda < \alpha$. Dann existiert j_0, so dass $\left\langle Au_{k_j}, u_{k_j} - u\right\rangle \geq \lambda$ für alle $j \geq j_0$. Damit ist dann

$$\left\langle Bu_{k_j}, u_{k_j} - u\right\rangle \leq \left\langle (A + B)u_{k_j}, u_{k_j} - u\right\rangle - \lambda \quad \forall j \geq j_0$$

und somit gilt

$$\begin{aligned}\limsup \left\langle Bu_{k_j}, u_{k_j} - u\right\rangle &\leq \underbrace{\limsup \left\langle (A + B)u_{k_j}, u_{k_j} - u\right\rangle}_{\leq 0} - \lambda \\ &\leq -\lambda < 0.\end{aligned}$$

Da B pseudo-monoton ist, gilt $\liminf \left\langle Bu_{k_j}, u_{k_j} - v \right\rangle \geq \langle Bu, u - v\rangle \quad \forall v \in X$. Für speziell $v = u$ gilt dann aber $\liminf \left\langle Bu_{k_j}, u_{k_j} - u \right\rangle \geq 0$. Widerspruch, da $\limsup \left\langle Bu_{k_j}, u_{k_j} - u \right\rangle < 0$. Dies gilt auch analog für B. Damit lässt sich die Pseudo-Monotonie von A und B anwenden: für alle $v \in X$:

$$\begin{aligned}\liminf \langle (A+B)u_k, u_k - v\rangle &\geq \liminf \langle Au_k, u_k - v\rangle + \liminf \langle Bu_k, u_k - v\rangle \\ &\geq \langle Au, u - v\rangle + \langle Bu, u - v\rangle \\ &= \langle (A+B)u, u - v\rangle\end{aligned}$$

□

Bemerkung (kompakte Störung)

1. *Sei $A : X \to X^*$ hemi-stetig und monoton. Außerdem gelte:*

$$u_k \rightharpoonup u, \ \limsup \langle Au_k - Au, u_k - u\rangle \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u_k \to u.$$

   Für $B : X \to X^*$ gelte:

   - $u_k \to u \quad \Rightarrow \quad Bu_k \rightharpoonup Bu,$
   - $u_k \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad \limsup \langle Bu_k, u_k - u\rangle = 0.$

   Dann ist $A + B$ pseudo-monoton.

2. *Sei $A : X \to X^*$ pseudo-monoton. Für $B : X \to X^*$ gelte: $\forall (u_k) \subset X$ mit $u_k \rightharpoonup u$ existiert eine TF (k_j), so dass*

$$\liminf \left\langle Bu_{k_j}, u_{k_j} - v \right\rangle \geq \langle Bu, u - v\rangle \ \ \forall v \in X. \quad (*)$$

   Dann gilt: wenn

$$\limsup \left\langle (A+B)u_{k_j}, u_{k_j} - u \right\rangle \leq 0,$$

   so

$$\liminf \left\langle (A+B)u_{k_j}, u_{k_j} - v \right\rangle \geq \langle (A+B)u, u - v\rangle \quad \forall v \in X.$$

Beweis

1. Sei $u_k \rightharpoonup u$ mit $\limsup \langle (A+B)u_k, u_k - u\rangle \leq 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}&\limsup \langle Au_k - Au, u_k - u\rangle \leq \\ &\leq \limsup \langle (A+B)u_k, u_k - u\rangle + \lim \langle Bu_k, u - u_k\rangle + \lim \langle Au, u - u_k\rangle \leq 0.\end{aligned}$$

   Nach Voraussetzung gilt daher $u_k \to u$. Da A pseudo-monoton ist, folgt

$$\begin{aligned}\liminf \langle (A+B)u_k, u_k - v\rangle &\geq \liminf \langle Au_k, u_k - v\rangle + \lim \langle Bu_k, u_k - v\rangle \geq \\ &\geq \langle (A+B)u, u - v\rangle\end{aligned}$$

   für alle $v \in X$.

2. Sei $u_k \rightharpoonup u$. Es gilt: $\limsup \left\langle Au_{k_j}, u_{k_j} - u \right\rangle \leq 0$. Andernfalls wäre $\limsup \left\langle Au_{k_j}, u_{k_j} - u \right\rangle =: \alpha > 0$. Dann existiert eine Teilfolge (k_{j_m}), so dass $\lim \left\langle Au_{k_{j_m}}, u_{k_{j_m}} - u \right\rangle = \alpha$. Fixiere $0 < \lambda < \alpha$. Für geeignetes $m_0 \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\left\langle Au_{k_{j_m}}, u_{k_{j_m}} - u \right\rangle \geq \lambda \quad \forall m \geq m_0.$$

   Wegen

$$\left\langle Bu_{k_{j_m}}, u_{k_{j_m}} - u \right\rangle \leq \left\langle (A+B)u_{k_{j_m}}, u_{k_{j_m}} - u \right\rangle - \lambda$$

   ergibt sich ein Widerspruch zu $(*)$ (mit v=u). Die Pseudo-Monotonie von A und $(*)$ liefern nun die Behauptung.

□

Hinreichende Bedingung für $(*)$ Sei Y ein normierter Raum mit

- $X \subset Y$ kompakt
- es existiert eine Abbildung $\sigma : [0, \infty) \to [0, \infty)$ nicht-fallend mit

$$|\langle Bu, v\rangle| \leq \sigma(\|u\|_X)\,\|v\|_Y \quad \forall u, v \in X.$$

$\square$

Für den nachfolgenden Satz benötigen wir den Fixpunktsatz von Brouwer (1912). Er sei hier nur erwähnt.

Satz 10 (Brouwer (1912))**.** *Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine nichtleere, konvexe, kompakte Menge. Dann besitzt jede stetige Abbildung $T : M \to M$ wenigstens einen Fixpunkt:*

$$\exists x^* \in M : \qquad Tx^* = x^*.$$

Eine Anwendung Sei $f : \overline{B_r(0)} \to \mathbb{R}^m$ stetig mit $(f(x), x)_{\mathbb{R}^m} \geq 0$ für alle $|x| \geq r$. Dann existiert $x_0 \in \overline{B_r(0)} : \quad f(x_0) = 0$.

Beweis Angenommen $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{B_r(0)}$. Definiere $Tx := -\frac{r}{|f(x)|}f(x)$ für $x \in \overline{B_r(0)}$. Dann ist $T : \overline{B_r(0)} \to \overline{B_r(0)}$ stetig. Nach Brouwer existiert $x^* \in \overline{B_r(0)} : \quad Tx^* = x^*$. Also gilt $|x^*| = |Tx^*| = r$. Damit gilt aber

$$\begin{aligned}
0 &\leq (f(x^*), x^*) \\
&= -\frac{|f(x^*)|}{r}\left(\underbrace{-\frac{r}{|f(x^*)|}f(x^*)}_{=Tx^*=x^*}, x^*\right) \\
&= -\frac{|f(x^*)|}{r}\,\|x^*\|^2 \\
&= -r|f(x^*)| < 0. \text{ Widerspruch.}
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 11. *Sei $(X, \|\cdot\|)$ reflexiv. Sei $A : X \to X^*$ mit*

1. *A bildet beschränkte Mengen in beschränkte Mengen ab*
2. $\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} \longrightarrow \infty$ *für* $\|u\| \longrightarrow \infty$.
3. *A genügt der Bedingung (M)*

Dann existiert für alle $f \in X^*$ ein $u \in X$ mit $Au = f$.

Der Beweis wird hier nur unter der zusätzlichen Voraussetzung geführt, dass X separabel ist.

Bezeichnungen: 1. Eine Folge (X_m) von endlich-dimensionalen Teilräumen $X_m \subset X$ heißt **Galerkin-Schema**, wenn

- $X_m \subseteq X_{m+1}$
- $\forall u \in X : \lim_{m\to\infty} \inf_{v \in X_m} \|u - v\| = 0$

2. Eine Folge $(x_i) \subset X$ heißt **Galerkin-Basis** für X, wenn

- je endlich viele der x_i sind linear unabhängig

- $X = \bigcup_{m=1}^{\infty}$, $X_m = span\{x_1, \dots, x_n\}$

Es gilt:

1. In jedem separablen normierten Raum existiert eine Galerkin-Basis. Für eine Galerkin-Basis bilden die $X_m := span\{x_1, \dots, x_m\}$ ein Galerkin-Schema.
2. Sei (x_i) ein vollständiges ONS im Hilbert-Raum X mit $\dim X = \infty$. Dann ist (x_i) eine Galerkin-Basis für X. Für $u \in X$:
$$P_m u := \sum_{i=1}^{m} (u, x_i) x_i$$
ist Orthoprojektor, $P_m u \to u$.
3. In jedem separablen Hilbert-Raum lässt sich ein vollständige ONS konstruieren nach Gram-Schmidt.

Beweis des Satzes:
Sei (x_i) eine Galerkin-Basis für X, $X_m := span\{x_1, \dots, x_m\}$ mit $\dim X_m = m$. Dann hat jedes $x \in X_m$ eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i x_i$.

$$x \xleftrightarrow{bij.} \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$$

Es existieren von m abhängige Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass $c_1 \|x\| \leq |\xi| \leq c_2 \|x\|$. Wir definieren die stetigen Injektionen

$$j_m : \mathbb{R}^m \to X_m, \qquad j_m(\xi) := \sum_{i=1}^{m} \xi_i x_i.$$

Dann gilt $c_1 \|j_m(\xi)\| \leq |\xi| \leq c_2 \|j_m(\xi)\|$ und j_m ist bijektiv von $\mathbb{R}^m$ auf X_m.

$$\begin{aligned} j_m^* &: X^* \to (\mathbb{R}^m)^* \cong \mathbb{R}^m \\ (j_m^*(x^*), \eta)_{\mathbb{R}^m} &= \langle x^*, j_m(\eta) \rangle \qquad \forall x^* \in X^*, \forall \eta \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Existenz einer Näherungslösung. Betrachte:

$$(*) \quad j_m^* \circ A \circ j_m(\xi) = j_m^*(f), \qquad \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Definiere nun $T\xi = T_m\xi := j_m^* \circ A \circ j_m(\xi) - j_m^*(f), \quad \xi \in \mathbb{R}^m$. Dann haben wir $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ und T ist stetig, denn aus $\xi^k \to \xi$ folgt: $j_m(\xi^k) \to j_m(\xi)$ in $X \Rightarrow A(j_m(\xi^k)) \stackrel{*}{\rightharpoonup} A(j_m(\xi))$ (vgl. Lemma 8/2 und 1.+2.). Damit gilt weiter, dass $j_m^*(A(j_m(\xi^k))) \to j_m^*(A(j_m(\xi)))$ in $\mathbb{R}^m$, da "$\stackrel{*}{\rightharpoonup}$"$\cong$ "$\to$"in $\mathbb{R}^m$.

Aus 2. folgt, dass es ein $\rho_0 > 0$ gibt mit

$$\frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|} \geq \|f\|_* \quad \forall \, \|v\| \geq \rho_0.$$

Damit haben wir für alle $\|v\| \geq \rho_0$, dass

$$\begin{aligned} \langle Av, v \rangle - \langle f, v \rangle &\geq \langle Av, v \rangle - \|f\|_* \|v\| \\ &\geq \|v\| \left(\frac{\langle Av, v \rangle}{\|v\|} - \|f\|_* \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Für $\xi \in \mathbb{R}^m$ mit $|\xi|_{\mathbb{R}^m} \geq \rho_1 := c_2\rho_0$ (abhängig von m) gilt:

$$\begin{aligned}(T\xi,\xi)_{\mathbb{R}^m} &= (j_m^* \circ A \circ j_m(\xi),\xi)_{\mathbb{R}^m} - (j_m^*(f),\xi)_{\mathbb{R}^m} \\ &= \langle A \circ j_m(\xi), j_m(\xi)\rangle - \langle f, j_m(\xi)\rangle \\ &\geq 0, \text{ denn } \|j_m(\xi)\| \geq \frac{1}{c_2}|\xi| \geq \frac{\rho_1}{c_2} = \rho_0.\end{aligned}$$

Der Fixpunktsatz von Brouwer (Anwendung nach Satz 10) liefert: $\exists \xi^{(m)} \in \mathbb{R}^m : \quad T\xi^{(m)} = 0, \quad |\xi^{(m)}| \leq \rho_1$. Definiere nun $u_m := \sum_{i=1}^{m} \xi_i x_i = j_m(\xi^{(m)}) \in X_m \subset X$. *Apriori-Abschätzungen:*

$$\begin{aligned}0 = T\xi^{(m)} &= j_m^* \circ A \circ j_m(\xi^{(m)}) - j_m^*(f) \\ \Rightarrow 0 = (T\xi^{(m)},\xi^{(m)})_{\mathbb{R}^m} &= \langle Au_m, u_m\rangle - \langle f, u_m\rangle\end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\langle Au_m, u_m\rangle = \langle f, u_m\rangle \leq \|f\|_* \|u_m\|$ und somit

$$\frac{\langle Au_m, u_m\rangle}{\|u_m\|} \leq \|f\|_* \qquad \text{für } \|u_m\| > 0.$$

Wegen der Koerzivität gibt es also eine Konstante C_1, so dass $\|u_m\| \leq C_1$. Nach 1. gilt dann auch $\|Au_m\| \leq C_2$ für ein $C_2 = konst.$

Grenzübergang $m \to \infty$. OBdA gilt $u_m \rightharpoonup u$ in X und $Au_m \overset{*}{\rightharpoonup} w^*$ in X^*. Zu zeigen ist: $w^* = f$, $\lim \langle f, u_m\rangle = \langle f, u\rangle$, dann ist $Au = f$.

$$\lim \langle Au_m, u_m\rangle = \lim \langle f, u_m\rangle = \langle f, u\rangle, \text{ da } u_m \rightharpoonup u.$$

Sei $m_0 \in \mathbb{N}$ beliebig, sei $v \in X_{m_0}$ beliebig, $v = \sum_{i=1}^{m_0} \chi_i x_i$. Sei $m \geq m_0$. $\tau := (\chi_1, \ldots, \chi_{m_0}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt $j_m(\tau) = j_{m_0}(\chi) \in X_m$. Damit haben wir:

$$\begin{aligned} & 0 = (j_m^* \circ A \circ j_m(\xi^{(m)}),\tau)_{\mathbb{R}^m} - (j_m^*(f),\tau) \\ \Leftrightarrow \quad & \langle Au_m, v\rangle = \langle f, v\rangle \\ \Rightarrow \quad & \langle w^*, v\rangle = \langle f, v\rangle\end{aligned}$$

Wegen $X = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k}$ folgt damit $w^* = f$ in X^*. Da A vom Typ (M) ist, folgt $Au = f$. □

3 Minimum-Probleme (Calculus of variations)

Siehe dazu: `http://www.math.hu-berlin.de/~jwolf/web/MathText/funktionalanalysis/calculus_of_variations.pdf`

4 Nichtlineare Evolutionsgleichungen

Methode von Faedo-Galerkin

Bezeichnungen

1. Sei X reflexiver normierter Raum, $\|\cdot\|$ Norm in X, $\|\cdot\|_*$ duale Norm in X^*, $\langle x^*, x\rangle$ = Wert von $x^* \in X^*$ in $x \in X$.

   Sei H Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$, Norm $|\cdot| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$. Es gelte:

   $X \subset H$ kompakt, dicht. (insbes. stetig: $\exists c_0 = \text{const} : |x| \leq c_0 \|x\| \, \forall x \in X$) Darstellungssatz von Riesz für H^*: $H^* \cong H$. Dann: $H \subset X^*$ stetig. Somit:

- $X \subset H \subset X^*$,
- $\forall h \in H, \forall x \in X: \ \langle h, x\rangle = (h, x)$.

2. Sei $(x_k) \subset X$ Galerkin-Basis für X:

   (a) $\forall m \in \mathbb{N}$ sind $\{x_1, ..., x_m\}$ linear unabhängig;

   (b) $\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m} = X$, wobei $X_m := \operatorname{span}\{x_1, ..., x_m\}$

   (vgl. Kapitel 2.2).

3. Sei $\{A(t)\}$ $(t \in [0, T])$ Familie von Operatoren $A(t) : X \to X^*$ mit:

$$\forall x, y \in X \text{ ist } t \mapsto \langle A(t)x, y\rangle \ \text{ meßbar auf } [0, T]; \tag{1}$$

$$\forall \text{ Folgen } (z_k) \subset X \text{ mit } z_k \to z \text{ gilt:} A(t)z_k \rightharpoonup A(t)z \ \forall t \in [0, T]; \tag{2}$$

$$\|A(t)x\|_* \le K(t) + C_0 \|x\|^{p-1} \ \ \forall t \in [0, T], \forall x \in X, \text{ wobei:} \tag{3}$$
$$1 < p < +\infty, \ K \in L^{p'}(0, T), \ K(t) \ge 0 \text{ f.f.a. } t \in [0, T], \ C_0 = \text{const} \ge 0.$$

Lemma 12. $\{A(t)\}$ $(t \in [0, T])$ *genüge (1),(2). Dann gilt:*

1. *Für alle Bochner-meßbaren Funktionen $u, v : [0, T] \to X$ ist*
$$t \mapsto \langle A(t)u(t), v(t)\rangle$$
meßbar auf $[0, T]$.

2. *Für $u \in L^p(0, T; X)$ definiere*
$$(\mathcal{A}u)(t) := A(t)u(t) \text{ f.f.a. } t \in [0, T].$$
Dann ist $t \mapsto (\mathcal{A}u)(t)$ Bochner-meßbar auf $[0, T]$.

Gilt außerdem (3), so
$$\|\mathcal{A}u\|_{L^{p'}(0,T;X^*)} \le C_1(1 + \|u\|^{p-1}_{L^p(0,T;X)}),$$
$$\lim_{\lambda\to 0} \langle \mathcal{A}(u + \lambda v), w\rangle_{L^p(0,T;X)} = \langle \mathcal{A}u, w\rangle \, \forall u, v, w \in L^p(0, T; X).$$

Satz 13 (monotoner Operator)**.** *Für $\{A(t)\}$ $(t \in [0, T])$ seien (1)-(3) erfüllt. Außerdem gelte:*

$$\exists \alpha_0 = \mathit{const} > 0, \alpha_1, \alpha_2 = \mathit{const} \ge 0 : \tag{4}$$
$$\langle A(t)x, x\rangle \ge \alpha_0 \|x\|^p - \alpha_1 |x|^2 - \alpha_2 \text{ ffa. } t \in [0, T], \forall x \in X;$$

$$\langle A(t)x - A(t)y, x - y\rangle \ge 0 \text{ ffa. } t \in [0, T], \forall x \in X. \tag{5}$$

Dann existiert für jedes $\{f, u_0\} \in L^{p'}(0, T; X^*) \times H$ genau ein $u \in L^p(0, T; X) \cap C([0, T]; H)$, so dass
$$u' \in L^{p'}(0, T; X^*)$$
und
$$-\int_0^T (u(t), \varphi'(t)x)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \langle A(t)u(t), \varphi(t)x\rangle\,\mathrm{d}t = (u_0, \varphi(0)x) + \int_0^T \langle f(t), \varphi(t)x\rangle\,\mathrm{d}t$$
$$\forall \varphi \in C^1([0, T]) \text{ mit } \varphi(T) = 0, \forall x \in X; \tag{6}$$

$$u(0) = u_0. \tag{7}$$

Bemerkung Aus (6) folgt:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t) \text{ in } X^*, \text{ ffa. } t \in [0,T]; \tag{8}$$

$$(u(t), v(t)) - \int_0^t (u(s), v'(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t \langle A(s)u(s), v(s)\rangle\,\mathrm{d}s = (u_0, v(0)) + \int_0^t \langle f(s), v(s)\rangle\,\mathrm{d}s$$
$$\forall t \in [0,T], \forall v \in C^1([0,T];X); \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2 + \int_0^t \langle A(s)u(s), u(s)\rangle\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}|u_0|^2 + \int_0^t \langle f(s), u(s)\rangle\,\mathrm{d}s \;\forall t \in [0,T]. \tag{10}$$

Beweisskizze 1) *Existenz einer Näherungslösung* Sei $(x_k) \subset X$ GALERKIN-Basis für X. Gramsche Matrix:

$$G^{(m)} := \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & ... & (x_m, x_1) \\ ... & ... & ... \\ (x_m, x_1) & ... & (x_m, x_m) \end{pmatrix}$$

(Skalarprodukt in H). $G^{(m)}$ ist symmetrisch und positiv definit, $\exists \gamma_m = \text{const} > 0:$

$$(G^{(m)}\xi, \xi)_{\mathbb{R}^m} \geq \gamma_m |\xi|^2 \;\forall \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Sei $\alpha_m \in \mathbb{R}^m$ $(m = 1, 2, ...)$ mit $\sum_{k=1}^m \alpha_{mk} x_k \to u_0$ in H für $m \to \infty$. Für $(t, \xi) \in [0,T] \times \mathbb{R}^m$, $k = 1, ..., m$, definiere

$$F_k(t, \xi) := \langle f(t), x_k\rangle - \left\langle A(t)\left(\sum_{l=1}^m \xi_l x_l\right), x_k \right\rangle.$$

CARATHÉODORY: $\exists 0 < a_m \leq T$ und absolut-stetige Funktionen $g_m : [0, a_m] \to \mathbb{R}^m$, so dass

$$g_m'(t) = (G_m)^{-1} F(t, g_m(t)) \text{ ffa. } t \in [0, a_m]. \tag{11}$$

$$g_m(0) = \alpha_m.$$

Äquivalent:

$$[G^{(m)} g_m'(t)]_k = F_k(t, g_m(t)) \; (k = 1, ..., k)$$

d.h.

$$\sum_{l=1}^m g_{ml}'(x_l, x_k) + \left\langle A(t)\left(\sum_{l=1}^m g_{ml}(t) x_l\right), x_k \right\rangle = \langle f(t), x_k\rangle \text{ ffa. } t \in [0, a_m], \; k = 1, ..., m.$$

A-priori-Abschätzung (Konstante hängt von $\frac{1}{\gamma_m}$ ab)

$$\Rightarrow a_m = T.$$

2) *A-priori-Abschätzungen unabhängig von m*
Definiere: $u_m(t) := \sum_{l=1}^m g_{ml}(t) x_l, \; t \in [0,T]$. Dann gilt:

$$(u_m'(t), x_k) + \langle A(t) u_m(t), x_k\rangle = \langle f(t), x_k\rangle \text{ ffa. } t \in [0,T], k = 1, ..., m,$$

$$u_m(0) = \sum_{l=1}^m \alpha_{ml} x_l. \tag{12}$$

Multiplikation mit $g_k(t)$, Summation, Integration:

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|_H^2 + \int_0^t \langle A(s)u_m(s), u_m(s)\rangle \,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}|u_m(0)|_H^2 + \int_0^t \langle f(s), u_m(s)\rangle \,\mathrm{d}s \;\forall t \in [0,T]$$

Lemma von GRONWALL $\Rightarrow$

$$|u_m(t)|_H \leq C_1 = \text{const}, \quad \int_0^T \|u_m\|^p \,\mathrm{d}s \leq C_2 = \text{const}.$$

3) Grenzübergang $m \to \infty$: Verwendung der Monotonie von $A(t)$. $\square$

Satz 14 (Operator vom Typ (M))**.** *Für $\{A(t)\}$ ($t \in [0,T]$) seien (1)-(4) erfüllt. Außerdem gelte: für jede Folge $(u_m) \subset L^p(0,T;X)$ mit:*

- $u_m \rightharpoonup u$ *in* $L^p(0,T;X)$,
- $u_m \to u$ *in* $L^2(0,T;H)$,
- $\mathcal{A}u_m \rightharpoonup \eta$ *in* $L^{p'}(0,T;X^*)$,
- $\limsup \langle \mathcal{A}u_k, u_k\rangle \leq \langle \eta, u\rangle$

gilt: $\mathcal{A}u = \eta$. *Dann gilt die Existenzaussage von Satz 13.*