Cantorsches Diskontinuum

Cantorsche Treppenfunktion

Definition von $C^k(\bar{\Omega})$

Bezeichnungen

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) & = & \sigma\text{-Algebra der } \textsc{Lebesgue}\text{-meßbaren Teilmengen des } \mathbb{R}^n, \\
\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) & = & \sigma\text{-Algebra der } \textsc{Borel}\text{-Mengen des } \mathbb{R}^n; \\
\text{es gilt} & : & \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \text{ [echte Inklusion];} \\
\lambda_n & = & \textsc{Lebesgue}\text{-Maß auf } \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \\
\beta_n & := & \lambda_n\Big|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} = \textsc{Borel}\text{-}\textsc{Lebesgue}\text{-Maß.}
\end{array}
$$

1 CANTORsches Diskontinuum

Im nullten Schritt der induktiven Konstruktion des CANTORschen Diskontinuums entfernen wir aus dem Intervall $[0,1]$ das offene mittlere Drittel $I_{0,1} = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$. Es verbleiben die 2^{0+1} abgeschlosenen disjunkten Intervalle $[0,1] \setminus I_{0,1} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Im ersten Schritt der Konstruktion werden aus diesen beiden Intervallen die jeweils mittleren Drittel $I_{I,1} = \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[$ und $I_{1,2} = \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[$ entfernt, so dass 2^{1+1} abgeschlossene disjunkte Teilintervalle von $[0,1]$ verbleiben:

$$[0,1] \setminus (I_{0,1} \cup (I_{1,1} \cup I_{1,2})) = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Diese Konstruktion wird induktiv fortgesetzt. Nach dem n-ten Schritt $(n = 0, 1, 2. \ldots,)$ verbleiben 2^{n+1} abgeschlossene disjunkte Teilintervalle der Länge $\frac{1}{3^{n+1}}$ von $[0,1]$.

DEFINITION *Die Menge*

$$
\begin{aligned}
D &:= [0,1] \setminus [I_{0,1} \cup (I_{1,1} \cup I_{1,2}) \cup (I_{2,1} \cup \ldots \cup I_{2,4}) \cup \ldots] \\
&= [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}
\end{aligned}
$$

heißt CANTORsches **Diskontinuum**.

Die Menge D ist abgeschlossen. Wegen $D \subset [0,1]$ ist D kompakt.

SATZ (G. CANTOR) *Es existiert eine Bijektion von D auf* $[0,1]$.

Wegen

$$\sum_{k=1}^{2^n} \lambda_1(I_{n,k}) = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n$$

gilt

$$\lambda_1(D) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} \lambda_1(I_{n,k}) = 1 - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n = 0.$$

Also:

> D ist eine überabzählbare BOREL-Menge vom Maß Null.

Hieraus folgt:

1. *Jede Teilmenge von D ist eine* LEBESGUE*sche Nullmenge.*
2. *Mächtigkeit des Systems der* LEBESGUE*schen Nullmengen ist größer als die Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen.*

Es gilt:

HAUSDORFF-*Dimension von* $D = \dfrac{\log 2}{\log 3}$. ■

2 CANTORsche Treppenfunktion

Diese Funktion wird auf $[0,1]$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &:= \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad x \in I_{0,1},\\
\psi(x) &:= \frac{1}{4} \quad \text{für} \quad x \in I_{1,1}, \quad \psi(x) := \frac{3}{4} \text{ für } x \in I_{1,2},\\
\psi(x) &:= \frac{2k-1}{2^{n+1}} \quad \text{für} \quad x \in I_{n,k} \quad (n = 0,1,2,\ldots; k = 1,\ldots,2^n).
\end{aligned}$$

Damit ist ψ definiert auf $\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k} = [0,1]\setminus D$.

Wir definieren ψ auf D durch

$$\psi(x) := \sup\{\psi(y) \mid y < x, y \in [0,1]\setminus D\},\ x \in D,$$

und in den Intervallendpunkten durch

$$\psi(0) := 0,\ \psi(1) := 1.$$

Die Funktion ψ ist monoton wachsend und stetig auf $[0,1]$. Es gilt

$$\begin{aligned}\psi([0,1]\setminus D) &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2^{n+1}},\frac{3}{2^{n+1}},\dots,\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right\}\\ &= \left\{\frac{m}{2^n}\mid m,n\in\mathbb{N}, m \text{ und } 2^n \text{ teilerfremd}, m\le 2^{n+1}-1\right\}\end{aligned}$$

d.h. $\psi([0,1]\setminus D)$ ist eine abzählbare, dichte Teilmenge von $[0,1]$. Daher gilt

$$\lambda_1(\psi([0,1]\setminus D))=0.$$

Wegen $\psi(0)=0$ und $\psi(1)=1$ folgt $\psi([0,1])=[0,1]$. Das ergibt

$$\boxed{\lambda_1(\psi(D))=1}$$

.

Mit Hilfe der CANTORschen Treppenfunktion ψ zeigen wir, daß das BOREL-LEBESGUE-Maß β_1 **nicht vollständig** ist. In der Tat, für das CANTORsche Diskontinuum D gilt:

$$D\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^1),\quad \beta_1(D)=\lambda_1(D)=0,\quad \exists\, B_0\subset D\quad mit:\quad B_0\notin\mathcal{B}(\mathbb{R}^1).$$

Um die Existenz einer solchen Menge B_0 zu zeigen, definieren wir

$$f(x):=x+\psi(x),\quad x\in[0,1].$$

Die Funktion f ist stetig und strikt monoton wachsend auf $[0,1]$. Es gilt $f([0,1])=[0,2]$; andererseits ist

$$f([0,1])=f(D)\cup f([0,1]\setminus D)\quad \text{disjunkt}$$

und daher

$$2=\lambda_1(f(D))+\lambda_1(f([0,1]\setminus D)).$$

Wegen $[0,1]\setminus D=\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$ (disjunkt) gilt

$$f([0,1]\setminus D)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^n} f(I_{n,k})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^n}\left(I_{n,k}+\left\{\frac{m}{2^k}\right\}\right);$$

hierbei ist $m\in\{1,3,\dots,2^{n+1}-1\}$ eine durch k und n eindeutig bestimmte natürliche Zahl, die zu 2^n teilerfremd ist. Wir erhalten

$$\lambda_1(f([0,1]\setminus D))=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\lambda_1(I_{n,k})=1,$$

also:
$$\lambda_1(f(D)) = 1.$$
Die Funktion
$$g := f^{-1}$$
ist wohldefiniert und stetig auf $[0,2]$.

Sei A_0 eine nicht-LEBESGUE-meßbare Teilmenge von $f(D)$. Für $B_0 := g(A_0)$ gilt: $B_0 \subset D$. Daher ist B_0 eine LEBESGUEsche Nullmenge.

Angenommen, B_0 ist BOREL-Menge. Da g stetig ist, wäre $A_0 = g^{-1}(B_0)$ LEBESGUE-meßbar; Widerspruch. ■

Motivation für Definition der Meßbarkeit von Funktionen

Das soeben betrachtete Beispiel kann als Motivation für die Definition der Meßbarkeit von Funktionen $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dienen.

DEFINITION *Sei $(X, \mathcal{A})$ Maß-Raum. $\varphi : X \to \mathbb{R}$ heißt $\mathcal{A}$-meßbar, wenn*
$$\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{A} \qquad \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$
Für $X = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ sind somit alle stetigen Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ LEBESGUE-meßbar (sogar BOREL-meßbar). Dies wäre für $n = 1$ für die oben betrachtete stetige Funktion $g = f^{-1}$ nicht der Fall, wenn in der Definition der Meßbarkeit die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ durch die „größere" σ-Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ ersetzt werden würde. ■

Einsetzen einer stetigen Funktion in eine meßbare Funktion

Sei $g = f^{-1}$ wie in Abschn. 2 definiert. Seien A_0 und B_0 die dort betrachteten Mengen. Sei
$$u := \chi_{B_0}.$$
Wir erhalten:

u ist LEBESGUE-meßbar auf $[0,1]$,

g ist stetig auf $[0,2]$,

$u \circ g = \xi_{A_0}$ ist **nicht** LEBESGUE-meßbar auf $[0,2]$.

Wir bemerken, daß die Funktion g sogar LIPSCHITZ-stetig (mit LIPSCHITZ-Konstante 1) ist. Das folgt aus der Ungleichung
$$(f(x) - f(y))(x - y) \geq (x - y)^2 \quad \forall\, x, y \in [0,1]. \qquad ■$$

Weitere Eigenschaften von ψ

1. Die Funktion ψ is HÖLDER-stetig auf $[0,1]$:

$$|\psi(x)-\psi(y)| \le 2|x-y|^{\log 2/\log 3} \quad \forall x,y \in [0,1].$$

2. DEFINITION *Eine reelle Funktion f heißt auf dem Intervall $[a,b]$* **absolut-stetig**, *wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0, \ \textit{so daß}: \ \sum_{k=1}^{m} |f(b_k)-f(a_k)| \le \varepsilon$$

für alle disjunkten Systeme von Teilintervallen $]a_1,b_1[,\ldots,]a_m,b_m[$ aus $[a,b]$ mit $\sum\limits_{k=1}^{m}(b_k-a_k) \le \delta$ ($m \in \mathbb{N}$ beliebig).

SATZ. *Absolut-stetige Funktionen bilden Nullmengen in Nullmengen ab.*

Es folgt: ψ ist **nicht absolut-stetig** auf $[0,1]$. ■

3. Aus der Definition von ψ folgt

$$\psi'(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \setminus D:$$

Daher gilt

$$(*) \qquad \int_0^1 \psi'(x)dx = 0 < 1 = \psi(1)-\psi(0).$$

Hieraus folgt ebenfalls, daß ψ nicht absolut-stetig auf $[0,1]$ ist, denn für absolut-stetige Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ existiert $f'(x)$ für f. a. $x\in[a,b]$, f' ist integrierbar über $[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x)-f(a) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Neben $(*)$ gilt außerdem:

$$\int_0^1 |\psi'|\, dx = 0 < \sup\left\{ \int_0^1 \psi\varphi' dx \;\middle|\; \varphi \in C_c^1(]0,1[),\ |\varphi| \le 1 \text{ in }]0,1[\right\}. \qquad ■$$

Die folgenden beiden Aussagen beziehen sich auf die Differentiation von ψ im verallgemeinerten Sinne.

$\boxed{1}$ *Es existiert keine Funktion* $\eta \in L^1_{\text{loc}}(0,1)$, *so daß*

$$\int_0^1 \psi\varphi' dx = -\int_0^1 \eta\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(]0,1[).$$

Daher ist ψ' **nicht** schwache Ableitung von ψ in $]0,1[$.

$\boxed{2}$ Sei $T_\psi \in \mathcal{D}'(]0,1[)$ die von ψ erzeugte reguläre Distribution in $]0,1[$:

$$\langle T_\psi, \varphi\rangle := \int_0^1 \psi\varphi dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(]0,1[).$$

Die Distribution T_ψ besitzt Ableitungen beliebiger Ordnung. Diese sind definiert durch

$$\langle T_\psi^{(m)}, \varphi\rangle := (-1)^m \int_0^1 \psi\varphi^{(m)} dx, \quad m \in \mathbb{N}, \;\; \varphi \in C_c^\infty(]0,1[).$$

Für die Ableitung erster Ordnung T'_ψ gilt:

2.1) T'_ψ ist keine reguläre Distribution.

2.2) $T'_\psi \neq O$ (im Sinne von $\mathcal{D}'(]0,1[)$).

2.3) Es gilt:

$$\left|\langle T'_\psi, \varphi\rangle\right| \leq \frac{3^\lambda}{4(3^\lambda - 2)} \sup_{\substack{s,t \in]0,1[\\ s \neq t}} \frac{|\varphi(s) - \varphi(t)|}{|s-t|^\lambda} \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$$

$\left(\lambda \in \left]\frac{\log 2}{\log 3}, 1\right] \text{ beliebig}\right)$. Daher kann ψ' im Sinne der Theorie der Distributionen mit einem linearen stetigen Funktional auf dem Raum der Hölder-stetigen Funktionen auf $]0,1[$ mit dem Exponent λ identifiziert werden. ∎

3 Definition von $C^k(\bar{\Omega})$

Definition *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *eine beschränkte offene Menge, sei* $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \bar{C}^k(\Omega) \;:=\; & \{u \in C^k(\Omega) \mid \textit{für jeden Multiindex } \alpha \textit{ mit } |\alpha| \leq k \\ & \textit{ist } D^\alpha u \textit{ gleichmäßig stetig auf } \Omega\}. \end{aligned}$$

Seien $u \in \bar{C}^k(\Omega)$ und $x \in \partial\Omega$. Für jeden Multiindex α mit $|\alpha| \leq k$ existiert dann genau ein $w_\alpha(x) \in \mathbb{R}$, so daß für jede Folge (x_j) mit $x_j \in \Omega$ $(j \in \mathbb{N})$ und $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = x$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} D^\alpha u(x_j) = w_\alpha(x).$$

Die so definierte Funktion $w_\alpha : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ ist stetig.
Die Funktionenklasse $\bar{C}^k(\Omega)$ kann daher in äquivalenter Weise wie folgt charakterisiert werden.

$$\begin{aligned}\bar{C}^k(\Omega) \;:=\; \{u \in C^k(\Omega) \mid & \; \textit{für jeden Multiindex} \;\; \alpha \;\; \textit{mit} \;\; |\alpha| \leq k \\ & \textit{existiert ein} \;\; w_\alpha \in C(\bar{\Omega}), \;\; \textit{so daß} \;\; w_\alpha|_\Omega = D^\alpha u\}.\end{aligned}$$

Im Sinne dieser Definition kann man für $u \in \bar{C}^k(\Omega)$ schreiben:

$$D^\alpha u(x) := \begin{cases} D^\alpha u(x) & \text{für} \quad x \in \Omega, \\ w_\alpha(x) & \text{für} \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$(|\alpha| \leq k)$. ■

Wir benutzen die Schreibweise $\bar{C}^k(\Omega)$ um darauf hinzuweisen, daß diese Funktionenklasse *von Ω abhängen kann.* Genauer, seien Ω_1 und Ω_2 beschränkte offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so daß

$$\Omega_1 \neq \Omega_2, \quad \bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_2.$$

Dann ist

$$\bar{C}^1(\Omega_1) \neq \bar{C}^1(\Omega_2) \tag{+}$$

möglich.

Auf diesen Aspekt weisen einige Autoren hin, so z. B.

HILDEBRANDT, S.: **Analysis 2**. Springer-Verlag, Berlin 2003 [S. 28-29; 40];

TRIEBEL, H.: **Höhere Analysis**. Dt. Verl. Wissensch., Berlin 1972 [S. 27];

WALTER, W.: **Analysis II**. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin 1991 [S. 79].

Man schreibt $C^k(\bar{\Omega})$ anstelle $\bar{C}^k(\Omega)$, wenn die Zuordnung zwischen Ω und $\bar{\Omega}$ eineindeutig ist. Letzteres ist der Fall, wenn Ω die größte offene Teilmenge von $\bar{\Omega}$ ist, d.h. wenn

$$\Omega = \mathrm{Int}(\bar{\Omega}).$$

$\blacksquare$

Mit Hilfe der CANTORschen Treppenfunktion ψ kann (+) bestätigt werden.

Seien

$$\Omega_1 :=]0,1[, \quad \Omega_2 :=]0,1[\backslash D.$$

Die Mengen Ω_1 und Ω_2 sind offen; es gilt $\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_2 = [0,1]$. Für ψ gilt

$$\psi|_{\Omega_1} \notin \bar{C}^1(\Omega_1).$$

Andererseits ist

$$\psi|_{\Omega_2} \in C^1(\Omega_2),$$

$$\psi \; und \; \psi' \; sind \; stetig \; auf \; \bar{\Omega}_2 \; fortsetzbar,$$

d. h.

$$\psi|_{\Omega_2} \in \bar{C}^1(\Omega_2).$$

$\blacksquare$