1/1 WiSe: abstrakt mit
2003/2004 $(X, \mathcal{A}, \mu)$

Vorlesung WiSe
2007/2008
(mit einigen Übungen)

1. L^p - Räume

1.1 Grundbegriffe

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbare Menge

DEF 1.1.1 Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$\mathbb{L}^p(E) := \left\{ u : E \to \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; u \text{ meßbar}, \int_E |u|^p dx < +\infty \right\},$$

für $p = +\infty$ sei

$$\mathbb{L}^p(E) := \left\{ u : E \to \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; u \text{ meßbar}, \exists A \subset E \text{ meßb. mit } \lambda_n(A) = 0, \sup_{x \in E \setminus A} |u(x)| < \infty \right\}.$$

Für $u, v \in \mathbb{L}^p(E)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$(\alpha u)(x) := \alpha u(x), \quad x \in E,$$

$$(u+v)(x) := u(x) + v(x), \quad x \in E \setminus (E_{u,\infty} \cup E_{v,\infty})$$

FONSECA, I.; LEONI, G.: Modern methods in the calculus of variations: L^p Spaces. Springer, 2007.

Höldersche und Minkowskische Ungleichung

SATZ 1.1.2 1) <u>Höldersche Ungleichung.</u> Sei $1 < p < \infty$. Für $u \in \mathbb{L}^p(E)$ und $v \in \mathbb{L}^{p'}(E)$ gilt

$$uv \in \mathbb{L}^1(E),$$

$$\int_E |uv|\,dx \leq \left(\int_E |u|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_E |v|^{p'} dt\right)^{1/p'}$$

2) <u>Minkowskische Ungleichung.</u> Sei $1 \leq p < \infty$. Für $u, v \in \mathbb{L}^p(E)$ gilt

$$\left(\int_E |u+v|^p dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_E |u|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_E |v|^p dx\right)^{1/p}.$$

Sei $u \in \mathbb{L}^p(E)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ mit

$$\int_E |u|^p dx = 0 \qquad \text{falls } 1 \leq p < \infty,$$

$$\exists\, A \subset E: \ |A| = 0, \ \sup_{x \in E \setminus A} |u(x)| = 0 \qquad \text{falls } p = \infty.$$

Dann: $\lambda_n\left(\{x \in E \mid |u(x)| > 0\}\right) = 0.$

(d.h. u ist nur auf einer Nullmenge verschieden von Null)

Seien $u, v : E \to \mathbb{R}$ meßbar. u, v heißen <u>äquivalent auf E</u> (in Zeichen: $u \sim v$), wenn

$$\lambda_n\left(\{x \in E \mid u(x) \neq v(x)\}\right) = 0.$$

$\sim$ ist Äquivalenzrelation in der Menge der meßb. Funktionen.

$$\mathcal{N} := \{u : E \to \overline{\mathbb{R}} \mid u \text{ meßbar}, \ u \sim 0\}$$

ist linearer Teilraum von $\mathbb{L}^p(E)$.

DEF 1.1.3 Für $1 \leq p \leq \infty$ sei

$$L^p(E) := \mathbb{L}^p(E) / \mathcal{N}.$$

Bezeichnung für Elemente aus $L^p(E)$: $[u] \in L^p(E)$, also:

$$[u] := \{u + \varphi \mid u \in \mathbb{L}^p(E), \varphi \in \mathcal{N}\}$$
$$= \{v \in \mathbb{L}^p(E) \mid v \sim u, \ u \in \mathbb{L}^p(E)\}.$$

Normierung

$L^p(E)$ ist Vektorraum mit Nullelement $\mathcal{N}$.

Sei $[u] \in L^p(E)$. Für bel. Repräs. $u_1, u_2 \in [u]$ gilt:

$$\int_E |u_1|^p dx = \int_E |u_2|^p dx \quad \text{falls } 1 \leq p < \infty,$$

$$\inf_{A \subset E, |A| = 0} \left(\sup_{x \in E \setminus A} |u_1(x)| \right) =$$

$$= \inf_{B \subset E, |B| = 0} \left(\sup_{x \in E \setminus B} |u_2(x)| \right) \quad \text{falls } p = \infty.$$

DEF 1.1.4 Für $[u] \in L^p(E)$ sei

$$\| [u] \|_{L^p(E)} := \begin{cases} \left(\int_E |u|^p dx \right)^{1/p} & \text{falls } 1 \leq p < \infty, \\ \inf_{A \subset E, |A| = 0} \left(\sup_{x \in E \setminus A} |u(x)| \right) & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

wobei $u \in [u]$ bel. Repräs. | $\| [u] \|_{L^p(E)}$ ist Norm auf $L^p(E)$.

Im weiteren: $u \in L^p(E)$.

SATZ 1.1.5 Der Raum $L^p(E)$ ist vollständig, d.h. für jede Cauchy-Folge $(u_k) \subset L^p(E)$ existiert ein $u \in L^p(E)$, so daß

$$\lim_{k \to \infty} \| u_k - u \|_{L^p(E)} = 0 .$$

Für $1 \leq p < \infty$ gilt außerdem: es existieren eine Teilfolge (u_{k_j}) und $v \in L^p(E)$, so daß

$$\lim_{j \to \infty} u_{k_j}(x) = u(x) \quad \text{ffa. } x \in E,$$

$$|u_{k_j}(x)| \leq |v(x)| \quad \forall j \in \mathbb{N}, \text{ ffa. } x \in E.$$

Für $p = \infty$ gilt außerdem:

$$\lim_{k \to \infty} u_k(x) = u(x) \quad \text{ffa. } x \in E,$$

$$|u_k(x)| \leq \sup_{l \in \mathbb{N}} \| u_l \|_{L^\infty(E)} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \text{ ffa. } x \in E.$$

Sei E eine <u>offene</u> nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

DEF Sei $1 \leq p \leq \infty$.

1. $L^p_{loc}(E) :=$ Menge aller Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen $u : E \to \overline{\mathbb{R}}$, so daß $u|_K \in L^p(K)$ für jedes Kompaktum $K \subset E$.

2. Eine Folge $(u_k) \subset L^p_{loc}(E)$ konvergiert gegen $u \in L^p_{loc}(E)$, wenn für jedes Kompaktum $K \subset E$ gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k - u \|_{L^p(K)} = 0 .$$

1.2 Separabilität, Approximation durch stetige Funktionen

$\mathcal{W}$:= Menge aller halb-offenen Würfel

$$W = [a_1, a_1+s[\times \dots \times [a_n, a_n+s[$$

mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$.

$\mathcal{W}$ ist abzählbar.

LEMMA 1.2.1 Sei $1 \leq p < \infty$. Für jedes $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ u. jedes $\varepsilon > 0$ existieren

$$\tau_i \in \mathbb{Q}, \quad W_i \in \mathcal{W} \quad (i = 1, \dots, m; \quad m = m(\varepsilon)),$$

so daß

$$\left\| u - \sum_{i=1}^{m} \tau_i \chi_{W_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

[folgt aus Eigenschaften des Lebesgue-Maßes].

SATZ 1.2.2 Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ meßbar. Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(E)$ separabel.

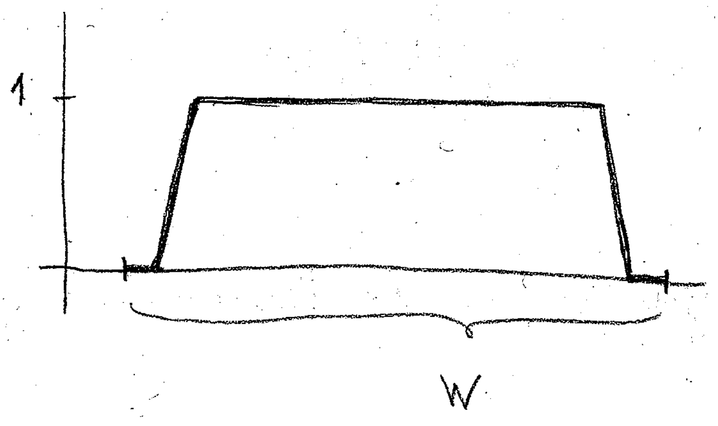
SATZ 1.2.3 Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine meßbare Menge mit $|E| > 0$. Dann ist $L^\infty(E)$ nicht separabel.

Approximation durch stetige Funktionen

SATZ 1.2.4 Sei $1 \leq p < \infty$. Für jedes $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ u. jedes $\varepsilon > 0$ existiert $\varphi_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$, so daß

$$\| u - \varphi_\varepsilon \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon .$$

[Approximation von χ_W durch Funktionen



]

FOLG 1.2.5 Seien $E \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty$. Für jedes $u \in L^p(E)$ und jedes $\varepsilon > 0$ ex. $\varphi_\varepsilon \in C_c(E)$, so daß

$$\| u - \varphi_\varepsilon \|_{L^p(E)} \leq \varepsilon.$$

[für $K \subset E$ kompakt ex. $\zeta \in C(\mathbb{R}^n)$: $\operatorname{supp}(\zeta) \subset E$, $0 \leq \zeta(x) \leq 1 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta(x) = 1 \; \forall x \in K$ (Urysohn)].

FOLG 1.2.6 Sei $1 \leq p < \infty$. Für jedes $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und jedes $\varepsilon > 0$ ex. $\delta = \delta(u, \varepsilon) > 0$, so daß

$$\int_E | u(x+y) - u(x) |^p \, dx \leq \varepsilon \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n, \; |y| \leq \delta.$$

1.3 Approximation durch C_c^∞-Funktionen

Faltung

SATZ 1.3.1 Für $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ gilt:

1) $y \mapsto u(x-y)\,v(y)$ ist integrierbar über $\mathbb{R}^n$ f.f.a. $x \in \mathbb{R}^n$;

2) für

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\,v(y)\,dy \quad \text{f.f.a. } x \in \mathbb{R}^n$$

gilt: $u * v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\| u * v \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \| u \|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \, \| v \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

$u * v$ heißt <u>Faltung</u> von u und v.

Mittelfunktion

Sei $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ fixiert mit:

$$\operatorname{supp}(\omega) \subseteq \overline{B_1(0)}, \quad \omega \geq 0 \text{ in } \mathbb{R}^N, \quad \int_{B_1(0)} \omega\,dx = 1.$$

Beispiel.

$$\omega(x) := \begin{cases} a \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1, \end{cases}$$

wobei

$$a := \left(\int_{B_1(0)} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) dx \right)^{-1}.$$

■

Für $\rho > 0$ sei

$$\omega_\rho(x) := \frac{1}{\rho^N}\, \omega\left(\frac{x}{\rho}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Es gilt:

1) $\operatorname{supp}(\omega_\rho) \subseteq \overline{B_\rho(0)}$;

2) $\lim\limits_{\rho \to 0} \omega_\rho(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$;

3) $(D^\alpha \omega_\rho)(x) = \dfrac{1}{\rho^{|\alpha|+N}} (D^\alpha \omega)\left(\dfrac{x}{\rho}\right) \; \forall \alpha, \forall x \in \mathbb{R}^N$;

4) $\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega_\rho \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega \, dx = 1 \quad \forall \rho > 0$.

DEF 1.3.2/1) Sei $E \subseteq \mathbb{R}^N$ meßbar. Für $u \in L^p(E)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ heißt

$$u_\rho(x) := (\omega_\rho * u)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\rho(x-y)\, \tilde{u}(y)\, dy, \; \rho > 0, \; x \in \mathbb{R}^N$$

<u>Mittelfunktion</u> <u>von</u> u <u>bez.</u> ω_ρ; hierbei:

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{f.f.a. } x \in E, \\ 0 & \text{f.f.a. } x \in \mathbb{R}^N \setminus E \end{cases}$$

falls $|\mathbb{R}^N \setminus E| > 0$.

1/12 a

$\boxed{\text{ergänzen}}$

DEF 1.3.2/2) Sei $E \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Für $u \in L^p_{loc}(E)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ heißt

$$\begin{cases} u_\rho(x) := \int\limits_E \omega_\rho(x-y)\, u(y)\, dy, & x \in \mathbb{R}^N \\ 0 < \rho < \operatorname{dist}(x, \partial E) & \text{falls } E \neq \mathbb{R}^N, \\ 0 < \rho \text{ beliebig} & \text{falls } E = \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Mittelfunktion von u bez. ω_ρ.

Bemerkungen 1. Aus Def. folgt:

$$u_\rho(x) = \int_{B_\rho(x)\cap E} \omega_\rho(x-y)\, u(y)\, dy = \int_{B_1(0)} \omega(z)\, \tilde{u}(x-\rho z)\, dz$$

$\forall \rho > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$

2. $B_\rho(x) \cap E = \emptyset \Rightarrow u_\rho(x) = 0$; also:

1) $\rho > 0$ vorgegeben $\Rightarrow u_\rho(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^N,\ \mathrm{dist}(x, E) > \rho,$

2) $x \in \mathbb{R}^N,\ \mathrm{dist}(x, E) > 0$ vorgegeben

$\Rightarrow u_\rho(x) = 0 \ \forall\, 0 < \rho < \mathrm{dist}(x, E).$ ∎

SATZ 1.3.3 / 1. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^N$ meßbar. Für $u \in L^p(E)$ $(1 \leq p < \infty)$ gilt:

1.1 $\| u_\rho \|_{L^p(E)} \leq \| u \|_{L^p(E)} \quad \forall \rho > 0$;

1.2 $\lim_{\rho \to 0} \| u_\rho - u \|_{L^p(E)} = 0$;

1.3 für jedes $\rho > 0$ u. jeden Multi-Index α gilt:

$$\left(D^\alpha u_\rho\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(D^\alpha \omega_\rho\right)(x-y)\, \tilde{u}(y)\, dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

$D^\alpha u_\rho$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^N$

also: $u_\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^N$ offen.

2.1 Sei $u \in C(E)$. Für jedes Kompaktum $K \subset E$ gilt:

$$\lim_{\rho \to 0} \| u_\rho - u \|_{C(K)} = 0.$$

2.2 Sei $u \in L^p(E)$ $(1 \leq p < \infty)$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ex. $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(E)$, so daß

$$\| u - \varphi_\varepsilon \|_{L^p(E)} \leq \varepsilon.$$

Anwendungen

- Test mit C_c^∞-Funktionen
- Konstruktion von C^∞-Schnittfunktionen
- Zerlegungen der Eins
- Präkompakte Teilmengen von L^p

Test mit C_c^∞-Funktionen

SATZ 1.3.4 Sei $E \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Für $u \in L^1_{loc}(E)$ gelte

$$\int_E u\varphi\,dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(E).$$

Dann gilt: $u(x) = 0$ f.a. $x \in E$.

Präkompakte Teilmengen

SATZ 1.3.5 Sei $1 \leq p < \infty$. Für eine Menge $\mathcal{M} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ sind die folgenden Aussagen 1° und 2° äquivalent:

1° $\mathcal{M}$ ist präkompakt;

2° 1. es ex. $C_0 = \text{const}$, so daß $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_0 \; \forall u \in \mathcal{M}$;

2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x+h) - u(x)|^p \, dx \leq \varepsilon \quad \forall u \in \mathcal{M},$$

$$\forall h \in \mathbb{R}^N \text{ mit } |h| \leq \delta;$$

3. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists r = r(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_r(0)} |u(x)|^p \, dx \leq \varepsilon \quad \forall u \in \mathcal{M}.$$

1.4 Dualer Raum von L^p, Reflexivität

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^N$ meßb. Sei $1 \leq p < \infty$.

Fixiere $v \in L^{p'}(E)$. Die Abbildung

$$u \longmapsto \int_E uv\,dx, \qquad u \in L^p(E)$$

ist linear u. stetig, also Element aus $(L^p(E))^*$ (= dualer Raum von $L^p(E)$). Bezeichnung:

$$\langle F_v, u \rangle_{L^p} := \int_E uv\,dx, \quad u \in L^p(E).$$

Es gilt:

$\boxed{Ü}$ $$\|F_v\|_{(L^p)^*} = \sup_{\|u\|_{L^p} \leq 1} \left| \langle F_v, u \rangle_{L^p} \right| = \|v\|_{L^{p'}(E)}$$

Also:

$$v \longmapsto I(v) := F_v, \qquad v \in L^{p'}(E)$$

ist Isometrie von $L^{p'}(E)$ <u>in</u> $(L^p(E))^*$.

SATZ 1.4.1 (RIESZ) Sei $1 \leq p < \infty$. Für $F \in (L^p(E))^*$ ex. genau ein $v \in L^{p'}(E)$, so daß

$$\langle F, u \rangle_{L^p} = \int_E u v \, dx \quad \forall u \in L^p(E),$$

$$\|v\|_{L^{p'}} = \|F\|_{(L^p)^*}.$$

<u>Bemerkung</u> Eine analoge Aussage gilt nicht für $p = \infty$: die Isometrie $I : L^1 \longrightarrow (L^\infty)^*$ ist <u>nicht</u> surjektiv.

Ein normierter Raum X heißt <u>reflexiv</u>, wenn die kanonische Isometrie $J : X \longrightarrow X^{**}$ <u>surjektiv</u> ist,

$$\langle J(x), x^* \rangle_{X^*} = \langle x^*, x \rangle \quad \forall x \in X.$$

SATZ 1.4.2 Für $1 < p < \infty$ ist L^p reflexiv.

SATZ 1.4.3 L^1 und L^∞ sind nicht reflexiv.