1 Maß auf Mannigfaltigkeiten

Sei M^k eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^r, sei $U = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in I\}$ Atlas auf M^k [$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ Karte von M^k (d.h. U_α offene Teilmenge des toplogischen Raumes M^k, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^k$ Homöomorphismus), $I =$ Indexbereich, $M^k = \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$,

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ist C^r-Diffeomorphie (in $\mathbb{R}^k$) für alle $\alpha, \beta \in I$ mit $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Bezeichnung:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbb{R}^k) &= \sigma - \text{Algebra der Lebesgue-meßbaren Teilmengen des } \mathbb{R}^k; \\ \lambda_k &= \text{Lebesgue-Maß in } \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Definition 1.1 Sei $U = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in I\}$ ein Atlas auf M^k.

$$\mathcal{L}(M^k) := \{E \subseteq M^k : \varphi_\alpha(E \cap U_\alpha) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k) \; \forall \alpha \in I\}.$$

Es gilt:

1. Das Mengensystem $\mathcal{L}(M^k)$ ist nichtleer: $\emptyset, M^k, U_\alpha \in \mathcal{L}(M^k)$ $(\alpha \in I)$.
2. $\mathcal{L}(M^k)$ ist korrekt definiert: Seien $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in I\}$ und $\{(V_\beta, \psi_\beta) \beta \in J\}$ zwei äquivalente Atlanten auf M^k [d.h.

   $$\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta)$$

   ist C^r-Diffeomorphie (in $\mathbb{R}^k$) für alle $\alpha \in I$, $\beta \in J$ mit $U_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$]. Dann gilt für $E \subseteq M^k$:

   $$\begin{aligned} &(\varphi_\alpha(E \cap U_\alpha) \in \mathcal{L}(R^k) \quad \forall \alpha \in I) \\ \iff &(\psi_\beta(E \cap V_\beta) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k) \quad \forall \beta \in J). \end{aligned}$$

3. $\mathcal{L}(M^k)$ ist σ-Algebra.

■

Definition 1.2 $\mathcal{F}^k \subset I\!R^n$ $(1 \leq k \leq n-1)$ *heißt* ***k*-dimensionale Hyperfläche** *der Klasse* C^r *in* $I\!R^n$, *wenn für jedes* $x \in \mathcal{F}^k$ *existieren:*

1^o *offene Umgebung* $U(x) \subset I\!R^n$,

2^o *offene Menge* $\mathcal{O} \subset I\!R^k$

3^o *eineindeutige Abbildung* $\Phi : \mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O}) = U(x) \cap \mathcal{F}^k$ *mit:*

$$\Phi \in C^r(\mathcal{O}; I\!R^n), \quad \text{Rang}\, \Phi'(y) = k \quad \forall\, y \in \mathcal{O}$$

$(\mathcal{O}, \Phi)$ heißt *Parameterdarstellung für* $U(x) \cap \mathcal{F}^k$.

Für Parameterdarstellungen $(\mathcal{O}, \Phi)$ gilt:

Sei Φ_i Parameterdarstellung von $U(x_i) \cap \mathcal{F}^k$ $(i = 1, 2)$, wobei $U(x_1) \cap U(x_2) \cap \mathcal{F}^k \neq \emptyset$. Dann ist

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : \Phi_1^{-1}(U(x_1) \cap U(x_2) \cap \mathcal{F}^k) \to \Phi_2^{-1}(U(x_1) \cap U(x_2) \cap \mathcal{F}^k)$$

eine C^r-Abbildung in $I\!R^k$ mit $\det(\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)'(y) \neq 0$ $\forall y \in U(x_1) \cap U(x_2) \cap \mathcal{F}^k$.

Bezeichnung:

$$\begin{aligned} U_\alpha &:= U(x_\alpha) \cap \mathcal{F}^k, \quad \Phi_\alpha : \mathcal{O}_\alpha \to \Phi(\mathcal{O}_\alpha) = U_\alpha \\ & \quad (\alpha \in I \ (= \text{Indexbereich})). \end{aligned}$$

Sei $\{(\mathcal{O}_\alpha, \Phi_\alpha) | \alpha \in I\}$ ein System von Parameterdarstellungen für $\mathcal{F}^k$, so daß $\bigcup_{\alpha \in I} \Phi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha) = \mathcal{F}^k$. Dann ist $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha^{-1}) | \alpha \in I\}$ Atlas für $\mathcal{F}^k$. Durch Hinzufügung aller zu diesem Atlas äquivalenten Atlanten für $\mathcal{F}^k$ entsteht ein maximaler Atlas für $\mathcal{F}^k$. Dieser definiert auf $\mathcal{F}^k$ die Struktur einer k-dimensionalen Mannigfaltigkeit der Klasse C^r.

Bezeichnung:

$$M := \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{n,n-1} \end{pmatrix}$$

Streichung der i-ten Zeile ($i = 1, \dots, n$):

$$M_{(i)} := \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{i-1,1} & \dots & m_{i-1,n-1} \\ m_{i+1,1} & \dots & m_{i+1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{n,n-1} \end{pmatrix}.$$

■

Sei $\mathcal{F}^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche der Klasse C^1 in $\mathbb{R}^n$ (vgl. Definition 1.2). Sei $\{(\mathcal{O}_\alpha, \Phi_\alpha) | \alpha \in I\}$ ein System von Parameterdarstellungen für F^{n-1}, so daß $\bigcup\limits_{\alpha \in I} \Phi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha) = \mathcal{F}^{n-1}$.

Motivation für Konstruktion eines Maßes auf $\mathcal{F}^{n-1}$.
Sei $(\mathcal{O}, \Phi)$ eine Paramterdarstellung für $U \subset \mathcal{F}^{n-1}$ ($\mathcal{O} = \mathcal{O}_\alpha, \Phi = \Phi_\alpha, U \subseteq \Phi(\mathcal{O})$). Sei $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ die kanonische Basis in $\mathbb{R}^{n-1}$.
Sei $x_o \in \mathcal{O}$. Setze:

$$\Phi'(x_o) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} \Bigg|_{x = x_o},$$

$$\begin{aligned} \tau_k &= \Phi'(x_o)(e_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k}(x_o) \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k}(x_o) \end{pmatrix} = \\ &= \text{Tangentialvektor an } \mathcal{F}^{n-1} \text{ im Punkt } y_o = \Phi(x_o) \end{aligned}$$

$(k = 1, \dots, n-1) \cdot \{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$ ist Basis im Tangentialraum an $\mathcal{F}^{n-1}$ im Punkt y_o.

Setze für $a > 0$:

$$\begin{aligned} W_a &= [x_{o1}, x_{o1} + a] \times \dots \times [x_{o,n-1}, x_{o,n-1} + a] \\ &\quad ((n-1) - \text{dimensionaler Würfel mit Kantenlänge } a \text{ und} \\ &\quad\quad \text{Eckpunkt in } x_o), \\ V_a &= \text{Parallelepiped im Tangentialraum an } \mathcal{F}^{n-1} \text{ im} \\ &\quad \text{Punkt } y_o, \text{ aufgespannt von } a\tau_1, \dots, a\tau_{n-1}. \end{aligned}$$

Der elementargeometrische Inhalt von V_a dient als Approximation für das zu konstruierende Maß von $U = \Phi(\mathcal{O})$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \Phi(x_o + ae_k) &= \Phi(x_o) + \Phi'(x_o)(ae_k) + \omega(x_o; ae_k) \\ &= y_o + a\tau_k + \omega(x_o; ae_k); \end{aligned}$$

$$L := \Phi'(x_o)(\cdot) \Longrightarrow V_a = L(W_a).$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1}(L(W_a)) &= \lambda_{n-1}(W_a)(|\det\{(\tau_k, \tau_\ell)\}|)^{1/2} \quad ^{1} \\ &= \lambda_{n-1}(W_a)[\sum_{i=1}^{n}(\det(\Phi'(x_o))_{(i)})^2]^{1/2}, \end{aligned}$$

also:

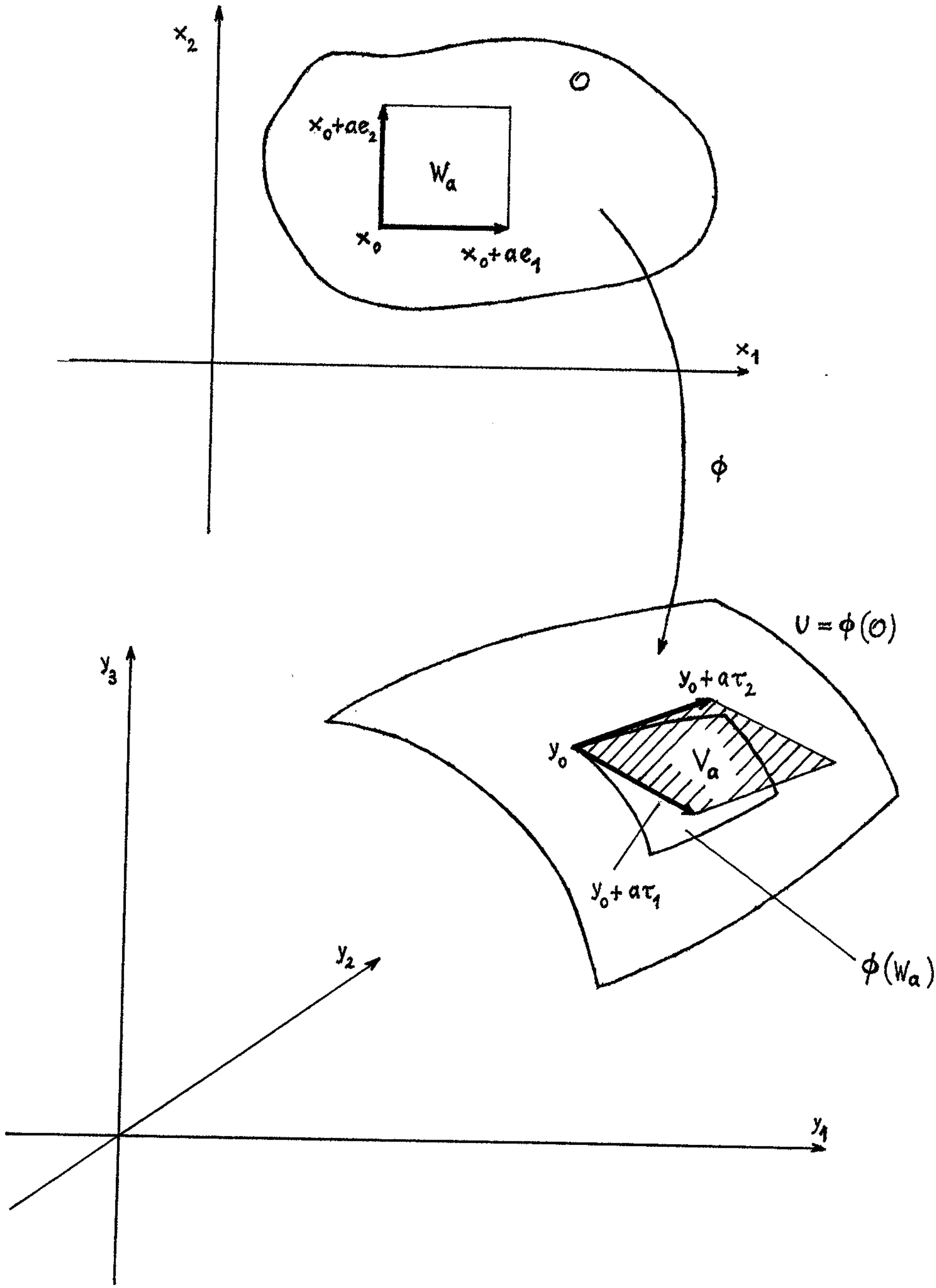
$$\lambda_{n-1}(V_a) = \int_{W_a} [\sum_{i=1}^{n}(\det(\Phi'(x_o))_{(i)})^2]^{1/2} d\lambda_{n-1}(x)$$

(Integration bez. des Lebesgue-Maßes λ_{n-1}).

Bezeichnung:

$$D_\Phi(x) := \sum_{i=1}^{n}(\det(\Phi'(x))_{(i)})^2, \qquad x \in \mathcal{O}.$$

[1] $\det\{(\tau_k, \tau_\ell)\}$ = Gramsche Determinante der $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$;
(τ_k, τ_ℓ) = Skalarprodukt von τ_k und τ_ℓ (bez. $\mathbb{R}^n$).


x_2
O
$x_0 + ae_2$
W_a
x_0
$x_0 + ae_1$
x_1
ϕ
$U = \phi(O)$
y_3
$y_0 + a\tau_2$
y_0
V_a
$y_0 + a\tau_1$
y_2
$\phi(W_a)$
y_1

Damit: Die Differenz

$$\lambda_{n-1}(V_a) - \int\limits_{W_a} \sqrt{D_\Phi(x)}\, d\lambda_{n-1}(x)$$

wird "klein" für "hinreichend kleines a". ■

Definition 1.3 *Sei $\mathcal{F}^{n-1} \subset I\!R^n$ eine $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche der Klasse C^1 in $I\!R^n$. Sei $\{(\mathcal{O}_\alpha, \Phi_\alpha) | \alpha \in I\}$ ein System von Parameterdarstellungen für $\mathcal{F}^{n-1}$, so daß $\bigcup\limits_{\alpha\in I} \Phi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha) = \mathcal{F}^{n-1}$ (oBdA: $I = \{1, \ldots, p\}$ bzw. $I = I\!N$).*

Einführung eines Maßes auf $\mathcal{F}^{n-1}$ mit Hilfe des Lebesgue-Maßes in $I\!R^{n-1}$:

1) $\lambda_{M^{n-1}}(\emptyset) := 0.$

2) $A \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^{n-1}) : \lambda_{\mathcal{F}^{n-1}}(A) := \sum\limits_{\alpha\in I} \int\limits_{\Phi_\alpha^{-1}(A_\alpha)} \sqrt{D_{\Phi_\alpha}}\, d\lambda_{n-1},$

wobei:

$$A_1 := A \cap U_1, \quad A_\beta := (A \cap U_\beta) \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{\beta-1} A_\alpha$$

$(U_\alpha = \Phi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha), \alpha \in I).$

Es gilt:

1. Die Definition der Mengenfunktion $\lambda_{\mathcal{F}^{n-1}}$ is korrekt: Seien $\{(\mathcal{O}_\alpha, \Phi_\alpha) | \alpha \in I\}$ und $\{(\mathcal{P}_\beta, \Psi_\beta) | \beta \in J\}$ zwei äquivalente Parameterdarstellungen für $\mathcal{F}^{n-1}$ mit $\bigcup\limits_{\alpha\in I} \Phi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha) = \bigcup\limits_{\beta\in J} \Psi_\beta(\mathcal{P}_\beta) = \mathcal{F}^{n-1}$ [d.h.

$$\Psi_\beta^{-1} \circ \Phi_\alpha : \Phi_\alpha^{-1}(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{P}_\beta) \to \Psi_\beta^{-1}(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{P}_\beta)$$

ist C^1-Diffeomorphie in $I\!R^{n-1}$ falls $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{P}_\beta \neq \emptyset$].
Dann gilt für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^{n-1})$ mit $A \subset \Phi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha) \cap \Psi_\beta(\mathcal{P}_\beta)$:

$$\int\limits_{\Phi_\alpha^{-1}(A)} \sqrt{D_{\Phi_\alpha}}\, d\lambda_{n-1} = \int\limits_{\Psi_\beta^{-1}(A)} \sqrt{D_{\Psi_\beta}}\, d\lambda_{n-1}.$$

2. Sei $\xi \in \mathbb{R}$ fixiert. Sei

$$\mathcal{F}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = \xi\} = \text{Hyperebene in } \mathbb{R}^n \quad [2]$$

$\Longrightarrow A \subset \mathcal{F}^{n-1} \Longleftrightarrow A = A' \times \{\xi\},\ A' \subset \mathbb{R}^{n-1}$.
Setze: $\Phi(x') = (x', \xi) = x\ (x' \in \mathbb{R}^{n-1})$.
$\Longrightarrow D_\Phi(x') \equiv 1 \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}$,
$\quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^{n-1}) \Longleftrightarrow A' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1})$,
$\Longrightarrow \lambda_{\mathcal{F}^{n-1}}(A) = \lambda_{n-1}(A')$.

■

Satz 1.4 $\lambda_{\mathcal{F}^{n-1}}$ *ist Maß auf* $\mathcal{L}(\mathcal{F}^{n-1})$.

■

2 Integral auf $(n-1)$-dimensionalen Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$

Sei $\mathcal{F}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche der Klasse C^1 in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $(\mathcal{F}^{n-1}, \mathcal{L}(\mathcal{F}^{n-1}), \lambda_{\mathcal{F}^{n-1}})$ ein Maß-Raum. In diesem Maß-Raum gelten die Aussagen der Theorie der Integration in (abstrakten) Maß-Räumen.
Sei $\{(\mathcal{O}_\alpha, \Phi_\alpha) | \alpha \in I\}$ ($I = \{1, \dots, p\}$ bzw. $I = \mathbb{N}$) ein System von Paramterdarstellungen für $\mathcal{F}^{n-1}$, $\bigcup\limits_{\alpha \in I} \Phi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha) = \mathcal{F}^{n-1}$. Seien $A \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^{n-1})$, $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $\lambda_{\mathcal{F}^{n-1}}$-integrierbar. Dann gilt:

$$\int\limits_A f d\lambda_{\mathcal{F}^{n-1}} = \sum_{\alpha \in I} \int\limits_{\Phi_\alpha^{-1}(A_\alpha)} f \circ \Phi_\alpha \sqrt{D_{\Phi_\alpha}} d\lambda_{n-1},$$

wobei:

$$A_1 := A \cap U_1, \quad A_\beta := (A \cap U_\beta) \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{\beta-1} A_\alpha$$

$(U_\alpha = \Phi_\alpha(\mathcal{O}_\alpha),\ \alpha \in I)$.

■

[2] $x = \{x_1, \dots, x_n\} = \{x', x_n\}$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Beispiele.-

1. Sei $\Omega \subset I\!R^{n-1}$ offen, beschränkt. Sei $h \in C^1(\overline{\Omega})$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &:= \{x \in I\!R^n : x' \in \Omega, x_n = h(x')\} \quad (x = \{x', x_n\}) \\ &\quad \text{(Graph der Funktion } h)\end{aligned}$$

Setze: $\mathcal{O} := \Omega$, $\Phi(x') := \{x', h(x')\}$. Φ ist eineindeutige Abbildung, $\Phi \in C^1(\mathcal{O}; I\!R^n)$ ($\Phi^{-1} =$ Projektion von $\mathcal{F}$ auf $I\!R^{n-1}$).

$$\Phi'(x') = \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix}\right\} n-1 \text{ Zeilen}$$

$\Longrightarrow$ Rang $\Phi'(x') = n - 1 \;\forall\, x' \in \mathcal{O}$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ ist $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche der Klasse C^1 in R^n

Bestimmung von $D_\Phi(x')$:

$$\begin{aligned}\det(\Phi'(x'))_{(i)} &= (-1)^{(n-1)+i}\frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n-1), \\ \det(\Phi'(x'))_{(n)} &= 1 \\ \Longrightarrow \; D_\Phi(x') &= \sum_{i=1}^{n}(\det(\Phi'(x'))_{(i)})^2 = 1 + |\nabla h(x')|^2 \\ \Big(\nabla h &= \Big\{\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_{n-1}}\Big\}\Big).\end{aligned}$$

Damit: für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ gilt:

$$\begin{aligned}\lambda_{\mathcal{F}}(A) &= \int_{\Phi^{-1}(A)} (1 + |\nabla h(x')|^2)^{1/2} dx', \\ \int_A f d\lambda_{\mathcal{F}} &= \int_{\Phi^{-1}(A)} f(x', h(x'))(1 + |\nabla h(x')|^2)^{1/2} dx'.\end{aligned}$$

■

2. Sei $\Omega \subset I\!R^2$ offen, beschränkt. Seien $h_i \in C^1(\overline{\Omega})$ $(i = 1,2,3)$ gegeben. Setze:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &:= \{x \in I\!R^3 : x_i = h_i(u,v), (u,v) \in \Omega \; (i = 1,2,3)\}, \\
\Phi(u,v) &:= \{h_1(u,v), h_2(u,v), h_3(u,v)\}, \; (u,v) \in \Omega, \\
\mathcal{O} &:= \Omega. \\
\Longrightarrow \quad \Phi'(u,v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u} & \frac{\partial h_2}{\partial v} \\ \frac{\partial h_3}{\partial u} & \frac{\partial h_3}{\partial v} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Voraussetzungen:

1. Φ ist eineindeutig.
2. Rang $\Phi'(u,v) = 2 \;\; \forall (u,v) \in \mathcal{O}$.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ ist zweidimensionale Hyperfläche der Klasse C^1 in $I\!R^3$.
Es gilt:

$$D_\Phi(u,v) = \sum_{i=1}^{3} (\det(\Phi'(u,v))_{(i)})^2 = EG - F^2,$$

wobei

$$E = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial h_i}{\partial u}\right)^2, \; G = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial h_i}{\partial v}\right)^2, \; F = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial h_i}{\partial u}\frac{\partial h_i}{\partial v}.$$

Damit gilt für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathcal{F}}(A) &= \int_{\Phi^{-1}(A)} (EG - F^2)^{1/2} du dv, \\
\int_A f d\lambda_{\mathcal{F}} &= \int_{\Phi^{-1}(A)} f(h_1, h_2, h_3)(EG - F^2)^{1/2} du dv.
\end{aligned}$$

Anwendung: Betrachtung der Sphäre in $I\!R^3$ als disjunkte Vereinigung zweier Flächenstücke mit einer Nullmenge.

$$S_r = S_r(0) := \{x \in I\!R^3 : |x| = r\} \quad \text{(Euklidische Norm)}$$

Setze:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 &:= (0,\frac{\pi}{2}) \times (0,2\pi), \quad \mathcal{O}_2 := (\frac{\pi}{2},\pi) \times (0,2\pi),\\
\Phi_i(\varphi,\psi) &:= r\{\sin\varphi\cos\psi, \sin\varphi\sin\psi, \cos\varphi\}, \quad (\varphi,\psi) \in \overline{\mathcal{O}}_i \quad (i=1,2),\\
\mathcal{F}_i &:= \{x \in I\!R^3 : x = \Phi_i(\varphi,\psi), (\varphi,\psi) \in \mathcal{O}_i\} \quad (i=1,2);
\end{aligned}$$

Φ_i ist eineindeutig: sei $\Phi_i(\varphi,\psi) = \Phi_i(\varphi',\psi')$ mit $(\varphi,\psi),(\varphi',\psi') \in \mathcal{O}_i$ ($i=1$ oder $i=2$) $\Longrightarrow \varphi = \varphi' \Longrightarrow \cos\psi = \cos\psi'$ und $\sin\psi = \sin\psi' \Longrightarrow \psi = \psi'$.
Rang $\Phi_i'(\varphi,\psi) = 2$ $\forall(\varphi,\psi) \in \mathcal{O}_i$, da z.B.

$$\det\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi \end{pmatrix} = \sin\varphi\cos\varphi \neq 0$$

$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}_i$ ist zweidimensionale Hyperfläche der Klasse C^1 in $I\!R^3$.

$$\begin{aligned}
N &= \{0,0,r\} = \Phi_1(0,0) = \text{ Nordpol},\\
S &= \{0,0,-r\} = \Phi_2(\pi,\pi) = \text{ Südpol},\\
G &= \{r\{\sin\varphi, 0, \cos\varphi\} | \varphi \in (0,\pi)\}\\
&= \text{ halber Großkreis ohne Nord- und Südpol},\\
\text{Ä} &= \{r\{\cos\phi, \sin\phi, 0\} | \psi \in (0,2\pi)\}\\
&= (\text{Äquator}) \setminus \{r,0,0\}
\end{aligned}$$

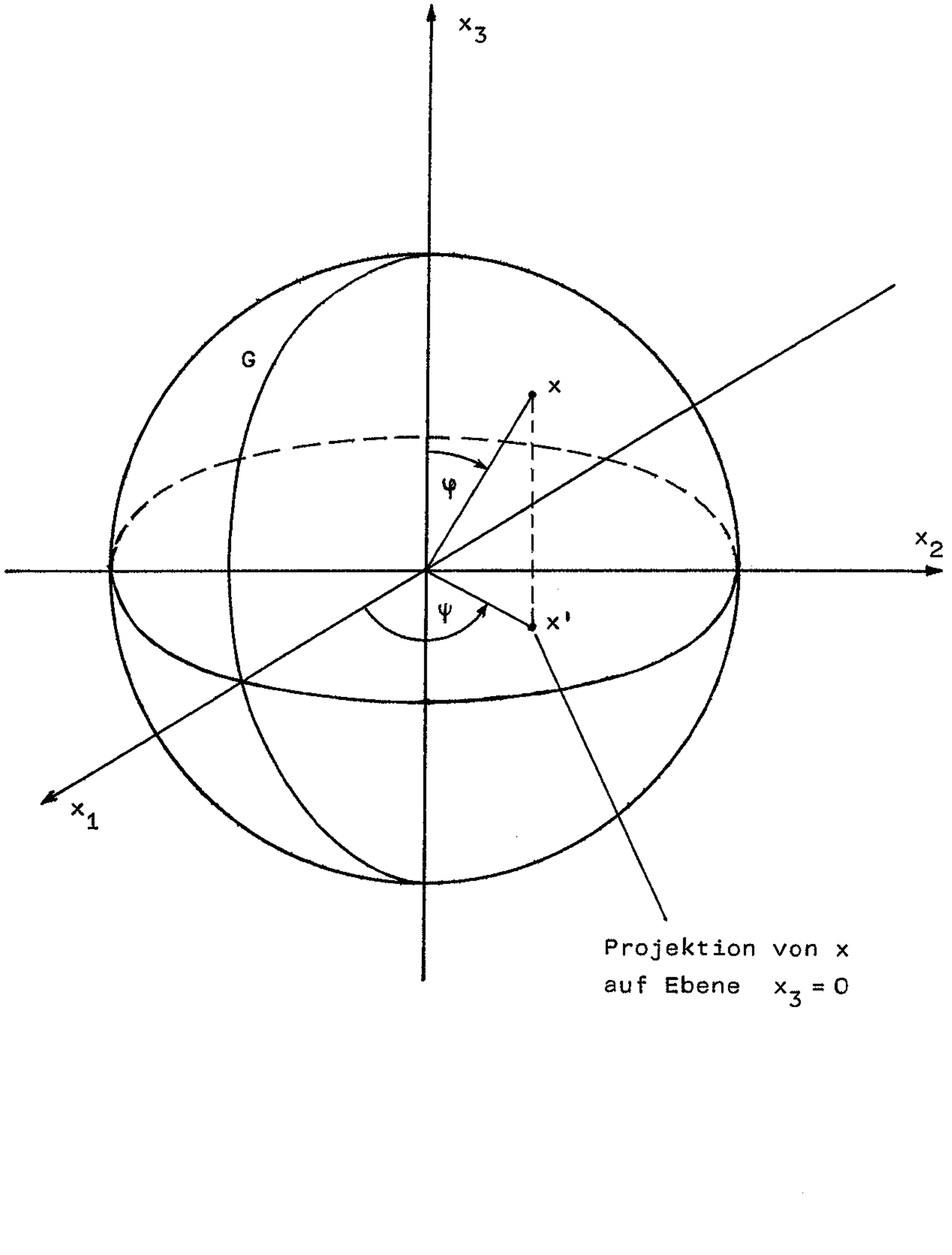
$\Longrightarrow S_r(0) = F_1 \cup F_2 \cup N \cup S \cup G \cup \text{Ä}$,
$N \cup S \cup G \cup \text{Ä}$ ist Menge vom Maß Null auf S_r.
$D_{\phi_i}(\varphi,\psi) = r^4 \sin^2\varphi \ \forall(\varphi,\psi) \in \mathcal{O}_i$ $(i=1,2)$
$\Longrightarrow \int\limits_{\mathcal{F}_i} f d\lambda_{\mathcal{F}_i} = \int\limits_{\mathcal{O}_i} f(\Phi_i(\varphi,\psi)) r^2 \sin\varphi d\varphi d\psi.$

Wir *definieren* nun:

$$\int\limits_{S_r(0)} f d\lambda_{S_r(0)} := \int\limits_{\mathcal{F}_1} f d\lambda_{\mathcal{F}_1} + \int\limits_{\mathcal{F}_2} f d\lambda_{\mathcal{F}_2} =$$

(Fubini)

$$= r^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{\pi} f(r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\sin\psi, r\cos\varphi) \sin\varphi d\varphi \right) d\psi. \quad \blacksquare$$



x3
G
x
φ
x2
ψ
x'
x1
Projektion von x
auf Ebene x3 = 0

3. *Integration über die Sphäre im $\mathbb{R}^n$.*

$$S_r(x_o) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_o - x| < r\}$$

Sei $e_1, \ldots, e_n$ die kanonische Basis in $\mathbb{R}^n$. Parameterdarstellung für $S_r(x_o)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &:= \{t \in \mathbb{R}^{n-1} : |t| < r\}, \\ \Phi_\alpha^\pm(t) &:= x_o + t_1 e_1 + \ldots + t_{\alpha-1} e_{\alpha-1} + \\ &\quad \pm\sqrt{r^2 - |t|^2} e_\alpha + t_\alpha e_{\alpha+1} + \ldots + t_{n-1} e_n. \\ &\quad (t \in \mathcal{O}, \alpha = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

$\Phi_\alpha^\pm$ ist eineindeutig:

$$(\Phi_\alpha^\pm)'(t) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{t_1}{\pm\sqrt{r^2 - |t|^2}} & -\frac{t_2}{\pm\sqrt{r^2 - |t|^2}} & \ldots & -\frac{t_{n-1}}{\pm\sqrt{r^2 - |t|^2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \alpha\text{−te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Rang $(\Phi_\alpha^\pm)'(t) = n - 1 \ \forall t \in \mathcal{O} \ (\alpha = 1, \ldots, n)$

$\Longrightarrow$ $S_r(x_o)$ ist $(n-1)$-dimensionale Hyperfläche der Klasse C^∞ in $\mathbb{R}^n$, $\{(\mathcal{O}, \Phi_\alpha^\pm) | \alpha = 1, \ldots, n\}$ ist Parameterdarstellung für $S_r(x_o)$.

Es gilt:

$$D_{\Phi_\alpha^\pm}(t) = 1 + \frac{|t|^2}{r^2 - |t|^2} = \frac{r^2}{r^2 - |t|^2} \quad \forall t \in \mathcal{O} \ (\alpha = 1, \ldots, n).$$

Setze: $U_\alpha^\pm := \Phi_\alpha^\pm(\mathcal{O})$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$. Dann ist $\{(U_\alpha^\pm, (\Phi_\alpha^\pm))^{-1} | \alpha = 1, \ldots, n\}$ Atlas für $S_r(x_o)$. Für $A \in \mathcal{L}(S_r(x_o))$ gilt:

$$\int_A f \, d\lambda_{S_r} = \sum_{\alpha=1}^n \int_{(\Phi_\alpha^\pm)^{-1}(A_\alpha^\pm)} f(\Phi_\alpha^\pm(t)) \frac{r}{\sqrt{r^2 - |t|^2}} dt$$

wobei:

$$A_1^\pm := A \cap U_1^\pm, \quad A_\beta^\pm := (A \cap U_\beta^\pm) \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{\beta-1} A_\alpha^\pm \quad (\beta = 2, \ldots, n).$$

Setze:

$$\begin{aligned}
S_r^+(x_o) &:= \{x \in I\!R^n : |x_o' - x'| < r, x_n = x_{on} + (r^2 - |x_o' - x'|^2)^{1/2}\},\\
S_r^-(x_o) &:= \{x \in I\!R^n : |x_o' - x'| < r, x_n = x_{on} - (r^2 - |x_o' - x'|^2)^{1/2}\},\\
\hat{S}_r(x_o) &:= \{x \in I\!R^n : |x_o' - x'| = r, x_n = x_{on}\} \quad (x = (x', x_n))
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $S_r(x_o) = S_r^+(x_o) \cup S_r^-(x_o) \cup \hat{S}_r(x_o)$ disjunkt,
$S_r^+(x_o), S_r^-(x_o)$ offen in $S_r(x_o) \Longrightarrow S_r^+(x_o), S_r^-(x_o) \in \mathcal{L}(S_r(x_o))$,
$\lambda_{n-1}(\hat{S}_r(x_o)) = \lambda_{n-1}(\{t \in I\!R^{n-1} : |t| = r\}) = 0$

$\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_{S_r(x_o)} f d\lambda_{S_r} = \int_{S_r^+(x_o)} f d\lambda_{S_r} + \int_{S_r^-(x_o)} f d\lambda_{S_r}$
(Additivität des Integrals).

Wegen

$$\begin{aligned}
S_r^+(x_o) &= \Phi_n^+(0)\\
&= \{x_o + t_1 e_1 + \ldots + t_{n-1} e_{n-1} + \sqrt{r^2 - |t|^2} e_n \mid t \in \mathcal{O}\}
\end{aligned}$$

gilt:

$$\int_{S_r^+(x_o)} f d\lambda_{S_r} = \int_{\mathcal{O}} f(x_o' + t, x_{on} + \sqrt{r^2 - |t|^2}) \frac{r}{\sqrt{r^2 - |t|^2}} dt$$

Analog für $S_r^-(x_o)$.

∎

3 Integralsatz von GAUß

Sei $\{P_o; e_1, \ldots, e_n\}$ ein fixiertes kartesisches Koordinatensystem in $I\!R^n$. Wir identifizieren $x \in I\!R^n$ mit dem n-Tupel seiner Koordinaten $\{x_1, \ldots, x_m\}$ bez. dieses Koordinatensystems:

$$x = P_o + \sum_{i=1}^n x_i e_i \cong \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Daneben betrachten wir weitere kartesische Koordinatensysteme $\{P_{\alpha o}; e_{\alpha 1}, \ldots, e_{\alpha n}\}$ $(\alpha = 1, \ldots, p)$ mit gleicher Orientierung wie $\{P_o; e_1, \ldots, e_n\}$.

Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ wird analog wie oben mit dem n-Tupel seiner Koordinaten $\{x_{\alpha 1}, \ldots, x_{\alpha n}\}$ bez. $\{P_{\alpha o}; e_{\alpha 1}, \ldots, e_{\alpha n}\}$ identifiziert:

$$x = P_{\alpha o} + \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha i} e_{\alpha i} \cong \{x_{\alpha 1}, \ldots, x_{\alpha n}\} =: x_\alpha.$$

Dabei gilt:

$$x = T_\alpha x_\alpha = A_\alpha x_\alpha + B_\alpha \qquad \det A_\alpha = 1.$$

Mit ∂E bezeichnen wir den Rand der Menge $E \subset \mathbb{R}^n$.

DEFINITION *Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gehört zur Klasse C^r $(r = 1, 2, \ldots,)$, wenn gilt:*

$$\exists\, \delta, \eta > 0,$$
$$\begin{cases} \exists & \textit{kartesische Koordinatensysteme } \{P_{\alpha o}; e_{\alpha 1}, \ldots e_{\alpha n}\}, \\ \exists & \textit{Funktionen } a_\alpha \; (\alpha = 1, \ldots, p): \end{cases}$$

1^o *$a_\alpha \in C^r(\bar{\Delta})$, wobei*

$$\Delta := \{\xi' = \{\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\} \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi_i| < \delta \; (i = 1, \ldots, n-1)\};$$

2^o *für jedes $x \in \partial\Omega$ existiert mindestens ein α, so daß*

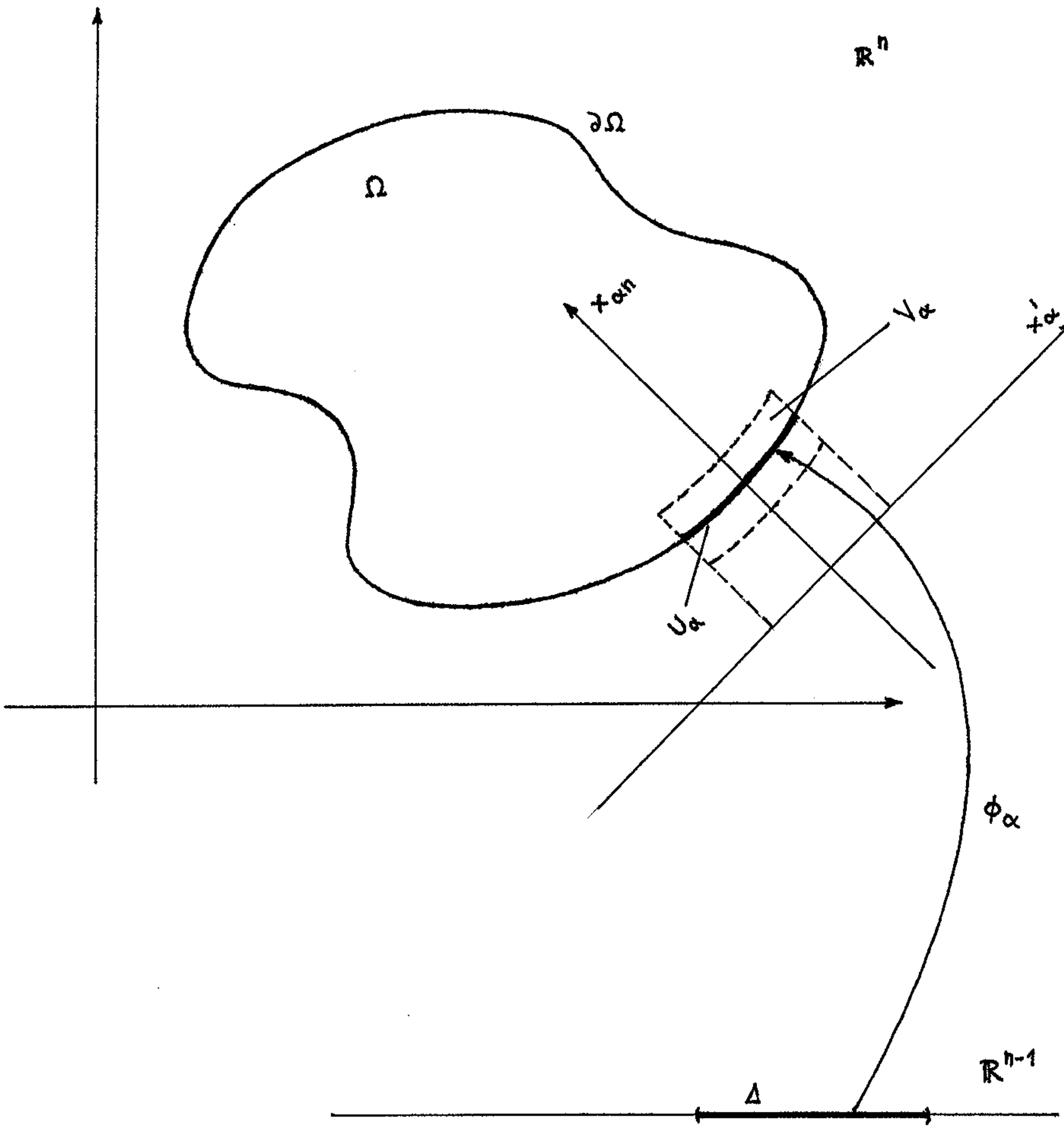
$$x = T_\alpha x_\alpha \; \textit{mit} \; x_\alpha = \{x'_\alpha, a_\alpha(x'_\alpha)\}, \; x'_\alpha \in \Delta;$$

3^o *für $\alpha = 1, \ldots, p$ gilt:*

$$\begin{aligned} x'_\alpha \in \Delta, a_\alpha(x'_\alpha) < x_{\alpha n} < a_\alpha(x'_\alpha) + \eta &\implies T_\alpha x_\alpha \in \Omega, \\ x'_\alpha \in \Delta, a_\alpha(x'_\alpha) - \eta < x_{\alpha n} < a_\alpha(x'_\alpha) &\implies T_\alpha x_\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \end{aligned}$$
$$(x_\alpha = \{x'_\alpha, a_\alpha(x'_\alpha)\}).$$

Bemerkung.- Es gilt:

$$x'_\alpha \in \Delta, \; x_{\alpha n} = a_\alpha(x'_\alpha) \implies T_\alpha x_\alpha \in \partial\Omega$$


$\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$
Ω
$x_{\alpha n}$
V_α
x'_α
U_α
ϕ_α
$\mathbb{R}^{n-1}$
Δ

$(\alpha = 1, \dots, p)$. ∎

Setze:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &:= \Delta, \\
V_\alpha &:= \{x = T_\alpha x_\alpha : x'_\alpha \in \Delta, a_\alpha(x'_\alpha) - \eta < x_{\alpha n} < a_\alpha(x'_\alpha) + \eta\}, \\
U_\alpha &:= V_\alpha \cap \partial\Omega, \\
\Phi_\alpha(x'_\alpha) &:= T_\alpha(\{x'_\alpha, a_\alpha(x'_\alpha)\}), \quad x'_\alpha \in \Delta \\
\Longrightarrow & \quad V_\alpha \text{ ist offen in } \mathbb{R}^n, \ \bigcup_{\alpha=1}^{p} U_\alpha = \partial\Omega, \\
& \quad \Phi_\alpha(\Delta) = U_\alpha, \ \Phi_\alpha \in C^r(\Delta), \ \Phi_\alpha \text{ ist eineindeutig,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi'_\alpha(x'_\alpha) &= \begin{pmatrix} A_{\alpha 11} + A_{\alpha 1n}\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_{\alpha 1}} & \dots & A_{\alpha 1n} + A_{\alpha 1n}\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_{\alpha n}} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ A_{\alpha n1} + A_{\alpha nn}\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_{\alpha n}} & \dots & A_{\alpha nn} + A_{\alpha nn}\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_{\alpha n}} \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} A_{\alpha 11} & A_{\alpha 12} & \dots & A_{\alpha 1n} \\ A_{\alpha 21} & A_{\alpha 22} & \dots & A_{\alpha 2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{\alpha n-1,1} & A_{\alpha n-1,2} & \dots & A_{\alpha n-1,n} \\ A_{\alpha n1} & A_{\alpha n2} & \dots & A_{\alpha nn} \end{pmatrix}}_{\text{Rang } = n} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_{\alpha 1}} & \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_{\alpha 2}} & \dots & \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_{\alpha n-1}} \end{pmatrix}}_{\text{Rang } = n-1}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\text{Rang } \Phi'_\alpha(x'_\alpha) = n - 1 \quad \forall x'_\alpha \in \Delta$

$\Longrightarrow$ $\partial\Omega$ ist $(n-1)$ – dimensionale Hyperfläche der Klasse C^r in $\mathbb{R}^n$, $\{(\Delta, \Phi_\alpha) | \alpha = 1, \dots, p\}$ ist Parameterdarstellung für $\partial\Omega$.

∎

Äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$. Setze:

$$\begin{aligned}
\nu_\alpha(x'_\alpha) &:= \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla a_\alpha|^2}} \left\{\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_{\alpha 1}}, \dots, \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_{\alpha n-1}}, -1\right\}, \ x'_\alpha \in \Delta. \\
\nu(x) &:= A_\alpha \nu_\alpha(\Phi_\alpha^{-1}(x)), \quad x \in U_\alpha.
\end{aligned}$$

Dann gilt für alle $x \in \partial\Omega$:

1. $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y \in \partial\Omega}} \dfrac{(\nu(x), x - y)}{|x - y|} = 0.$

2. $|\nu(x)| = 1.$

3. $\exists\, \sigma(x) > 0$:
   $\lambda \in (-\sigma(x), 0) \Longrightarrow x + \lambda\nu(x) \in \Omega,$
   $\lambda \in (0, \sigma(x)) \Longrightarrow x + \lambda\nu(x) \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}.$

$\nu(x)$ heißt äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ im Punkt x. ∎

INTEGRALSATZ VON GAUß. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet der Klasse C^1. Sei $f \in C^1(\bar{\Omega})$. Dann gilt:*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx = \int\limits_{\partial\Omega} f(x)\nu_i(x)dS(x) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

($\nu_i = i$-te Komponente der äußeren Einheitsnormale ν an $\partial\Omega$, Integration über $\partial\Omega$ im Sinne von Abschn. 1).

FOLGERUNG 1 (*Partielle Integration*)

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} g dx = \int\limits_{\partial\Omega} f g \nu_i dS - \int\limits_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx \quad \forall f, g \in C^1(\bar{\Omega}).$$

FOLGERUNG 2 (GREEN*sche Formeln*)

1. $\int\limits_{\Omega} (\Delta f) g dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu} g dS - \int\limits_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx,$

2. $\int\limits_{\Omega} ((\Delta f) g - f \Delta g) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} g - f \frac{\partial g}{\partial \nu}\right) dS$
   $\forall f, g \in C^2(\bar{\Omega}) \ \left(\frac{\partial f}{\partial \nu} := \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \nu_i\right).$ ∎

Ableitung von $\frac{1}{|x-y|^\mu}$ in Richtung der äußeren Normale an die Sphäre $S_r(x_o) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x_o - y| = r\}$ $(|x_o - x| < r; 0 < \mu < n)$ $y = \{y_1, \ldots, y_n\} = \{y', y_n\}$, $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

$$\begin{aligned}
S_r^+(x_o) &:= \{y \in \mathbb{R}^n : |x_o' - y'| < r, y_n = x_{on} + (r^2 - |x_o' - y'|^2)^{1/2}\},\\
S_r^-(x_o) &:= \{y \in \mathbb{R}^n : |x_o' - y'| < r, y_n = x_{on} - (r^2 - |x_o' - y'|^2)^{1/2}\},\\
\hat{S}_r(x_o) &:= \{y \in \mathbb{R}^n : |x_o' - y'| = r, y_n = x_{on}\}\\
\Longrightarrow &\quad S_r(x_o) = S_r^+(x_o) \cup \hat{S}_r(x_o) \cup S_r^-(x_o).
\end{aligned}$$

$y_n = h^+(y') := x_{on} + (r^2 - |x_o' - y'|^2)^{1/2}$, $|x_o' - y'| < r$:

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \frac{\partial h^+}{\partial y_i} = \frac{x_{oi} - y_i}{(r^2 - |x_o' - y'|^2)^{1/2}} \qquad (i = 1, \ldots, n-1),\\
& (1 + |\nabla h^+|^2)^{1/2} = \frac{r}{(r^2 - |x_o' - y'|^2)^{1/2}};\\
\Longrightarrow \quad & \nu_i = \frac{-\frac{\partial h^+}{\partial y_i}}{(1 + |\nabla h^+|^2)^{1/2}} = -\frac{x_{oi} - y_i}{r},\\
& \nu_n = \frac{1}{(1 + |\nabla h^+|^2)^{1/2}} = \frac{(r^2 - |x_o' - y'|^2)^{1/2}}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \nu_{S_r^+(x_o)}(y) = \{\nu_1, \ldots, \nu_n\} =\\
= \quad & \frac{1}{r}\{-(x_{o1} - y_1), \ldots, -(x_{o,n-1} - y_{n-1}), (r^2 - |x_o' - y'|^2)^{1/2}\}\\
= \quad & -\frac{1}{r}\{x_{o1} - y_1, \ldots, x_{o,n-1} - y_{n-1}, x_{on} - y_n\} \ \forall y \in S_r^+(x_o).
\end{aligned}$$

Analog: $y_n = h^-(y') = x_{on} - (r^2 - |x_o' - y'|^2)^{1/2}$, $|x_o' - y'| < r$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \nu_i = \frac{-\frac{\partial h^-}{\partial y_i}}{-(1 + |\nabla h^-|^2)^{1/2}} = -\frac{x_{oi} - y_i}{r},\\
& \nu_n = \frac{1}{-(1 + |\nabla h^-|^2)^{1/2}} = -\frac{(r^2 - |x_o' - y'|^2)^{1/2}}{r}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \nu_{S_r^-(x_o)}(y) \ = \ \frac{1}{r}\{-(x_{o1} - y_1), \ldots, -(x_{o,n-1} - y_{n-1}), -(r^2 - |x_o' - y'|^2)^{1/2}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{r}\{x_{o1}-y_1,\ldots,x_{o,n-1}-y_{n-1},x_{on}-y_n\}\ \forall y \in S_r^-(x_o).\\
\nu_{\hat{S}_r(x_o)}(y) &:= -\frac{1}{r}\{x_{o1}-y_1,\ldots,x_{o,n-1}-y_{n-1},0\}\ \forall y \in \hat{S}_r(x_o).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \nu = \nu_{S_r(x_o)}(y) &= -\frac{1}{r}\{x_{o1}-y_1,\ldots,x_{o,n-1}-y_{n-1},x_{on}-y_n\}\ \forall y \in S_r(x_o).\\
\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|x-y|^\alpha} &:= \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{|x-y|^\alpha}\right)\nu_i\\
&= -\frac{\alpha}{r|x-y|^{\alpha+2}}\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)(x_{oi}-y_i)\\
&\qquad \forall y \in S_r(x_o),\ \ \forall x \in B_r(x_o).\\
\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|x_o-y|^\alpha} &= -\frac{\alpha}{r^{\alpha+1}} \qquad \forall y \in S_r(x_o).
\end{aligned}
$$

Anwendungen der Transformationsformel

1.

$$\int\limits_{S_r(x)} f(y)d_y\sigma = r^{n-1}\int\limits_{S_1(0)} f(x+rz)d_z\sigma.$$

Beweis. Betrachtung für

$$\begin{aligned}
S_r^+(x) = \{&y \in \mathbb{R}^n : |y'-x'| < r, y_n = x_n + (r^2 - |y'-x'|^2)^{1/2}\} \\
&(x = (x', x_n), y = (y', y_n) \quad \text{mit} \quad x', y' \in \mathbb{R}^{n-1}); \\
&y_n = \varphi(y') := x_n + (r^2 - |y'-x'|^2)^{1/2} \\
\Longrightarrow \quad &(1 + |D\varphi|^2)^{1/2} = \frac{r}{(r^2 - |y'-x'|^2)^{1/2}}, \\
\Longrightarrow \quad &\int\limits_{S_r^+(x)} f(y)d_y\sigma = \int\limits_{|y'-x'|<r} f(y', \varphi(y'))\frac{r}{(r^2 - |y'-x'|^2)^{1/2}}dy';
\end{aligned}$$

Transformation: $y' = T(z') = x' + rz'$, $z' \in B_1(0)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad &\det T'(z') = r^{n-1}, \\
\Longrightarrow \quad &\int\limits_{|y'-x'|<r} f(y'\varphi(y'))\frac{r}{(r^2 - |y'-x'|^2)^{1/2}}dy' \\
&= r^{n-1}\int\limits_{|z'|<r} f(x'+rz', x_n + r(1-|z'|^2)^{1/2})\frac{1}{(1-|z'|^2)^{1/2}}dz', \\
&= r^{n-1}\int\limits_{S_1(0)} f(x+rz)d_z\sigma.
\end{aligned}$$

■

2.

$$\int\limits_{B_r(x)} f(y)dy = \int\limits_0^r\Big(\int\limits_{S_\rho(x)} f(y)d_y\sigma\Big)d\rho = \int\limits_0^r \rho^{n-1}\Big(\int\limits_{S_1(0)} f(x+\rho z)d_z\sigma\Big)d\rho.$$

Beweis. Betrachtung für

$$B_r^+(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < r,\ y_n > 0\}$$

$$\int_{B_r^+(0)} f(y)dy = \int_{|y'|<r} \left(\int_0^{\sqrt{r^2-|y'|^2}} f(y', y_n)dy_n \right) dy';$$

setze:

$$\begin{aligned} B'_\tau(0) &:= \{y' \in I\!R^{n-1} : |y'| < \tau\}, \\ \mathcal{X}_{B'_\tau(0)}(y') &:= \begin{cases} 1 & \text{für } y' \in B'_\tau(0), \\ 0 & \text{für } y' \in I\!R^{n-1} \setminus B'_\tau(0); \end{cases} \end{aligned}$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} &\int_0^r \left(\int_{S_\rho^+(0)} f(y)d_y\sigma \right) d\rho \\ &= \int_0^r \left(\int_{|y'|<\rho} f(y', \sqrt{\rho^2 - |y'|^2}) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - |y'|^2}} dy' \right) d\rho \\ &= \int_0^r \int_{B'_r(0)} \mathcal{X}_{B'_\rho(0)}(y') f(y', \sqrt{\rho^2 - |y'|^2}) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - |y'|^2}} dy' d\rho \\ &\text{(Fubini)} \\ &= \int_{B'_r(0)} \int_0^r \mathcal{X}_{B'_\rho(0)}(y') f(y', \sqrt{\rho^2 - |y'|^2}) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - |y'|^2}} d\rho dy'; \end{aligned}$$

für $0 < \rho < r$ gilt:

$$\mathcal{X}_{B'_\rho(0)}(y') = \begin{cases} 1 & \text{für } |y'| < \rho, \\ 0 & \text{für } \rho \leq |y'| < r; \end{cases}$$

Transformation: $\xi = T(\rho) = \sqrt{\rho^2 - |y'|^2}$, $|y'| < \rho < r$;

$$\Longrightarrow T'(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - |y'|^2}},$$

$$\rho = |y'| \Longleftrightarrow \xi = 0, \; \rho = r \Longleftrightarrow \xi = \sqrt{r^2 - |y'|^2};$$

für $y' \in B'_r(0)$ erhält man somit:

$$\int_0^r \mathcal{X}_{B'_\rho(0)}(y') f(y', \sqrt{\rho^2 - |y'|^2}) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - |y'|^2}} d\rho$$

$$= \int_{|y'|}^{r} f(y', \sqrt{\rho^2 - |y'|^2}) \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - |y'|^2}} d\rho$$

$$= \int_{0}^{\sqrt{r^2-|y'|^2}} f(y', \xi) d\xi.$$

Analoge Betrachtung für

$$\int_{B_r^-(0)} f(y)dy = \int_{|y'|<r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-|y'|^2}}^{0} f(y', y_n) dy_n \right) dy'.$$

■

3. *Abschätzung von*

$$\int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^\mu}$$

($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *Lebesgue-meßbar*, $x \in \bar{\Omega}$, $0 < \mu < n$).

1^o $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig:

$$h(y) := \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^\mu} & \text{für} \quad y \neq x, \\ 0 & \text{für} \quad y = x. \end{cases}$$

h ist Lebesgue-meßbar in $\mathbb{R}^n$;

$$\int_{\Omega} \frac{dy}{|x-y|^\mu} := \int_{\Omega} h(y)dy.$$

2^o $0 < \rho < r < +\infty$:

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)\setminus B_\rho(x)} \frac{dy}{|x-y|^\mu} &= \int_{\rho}^{r} \left(\int_{S_t(x)} \frac{1}{|x-y|^\mu} d_y\sigma \right) dt \quad \text{(vgl. 2.)} \\ &= \textstyle\sum_n \displaystyle\int_{\rho}^{r} t^{n-1-\mu} dt \\ &= \frac{\sum_n}{n-\mu} (r^{n-\mu} - \rho^{n-\mu}). \end{aligned}$$

$$\mathcal{X}_\rho(y) := \begin{cases} 1 & \text{für } \; y \in B_r(x) \backslash B_\rho(x), \\ 0 & \text{für } \; y \in \overline{B_\rho(x)}. \end{cases}$$

$\mathcal{X}_\rho(y) \to 1$ monoton wachsend für $\rho \to 0$ ($\forall y \in B_r(x)$).

Satz über die monotone Konvergenz:

$$\int\limits_{B_r(x)} \frac{dy}{|x-y|^\mu} = \lim_{\rho \to 0} \int\limits_{B_r(x)} \frac{\mathcal{X}_\rho(y)}{|x-y|^\mu} dy = \frac{\sum_n r^{n-\mu}}{n-\mu}.$$

3^o $\int\limits_\Omega \frac{dy}{|x-y|^\mu}$ ist als Lebesgue-Integral einer nichtnegativen meßbaren Funktion wohldefiniert. Sei $0 < r < +\infty$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega \frac{dy}{|x-y|^\mu} &= \int\limits_{\Omega \cap B_r(x)} \frac{dy}{|x-y|^\mu} + \int\limits_{\Omega \backslash (\Omega \cap B_r(x))} \frac{dy}{|x-y|^\mu} \\ &\leq \frac{\sum_n r^{n-\mu}}{n-\mu} + r^{-\mu} \lambda_n(\Omega \backslash (\Omega \cap B_r(x)))^3. \end{aligned}$$

Sei $0 < \lambda_n(\Omega) < +\infty$. Setze $r = \left(\frac{n\lambda_n(\Omega)}{\sum_n}\right)^{\frac{1}{n}}$. Dann folgt aus der letzten Abschätzung:

$$\int\limits_\Omega \frac{dy}{|x-y|^\mu} \leq \frac{2n-\mu}{n-\mu} \left(\frac{\sum_n}{n}\right)^{\frac{\mu}{n}} (\lambda_n(\Omega))^{\frac{n-\mu}{n}}.$$

■

4. *Transformation auf Kugelkoordinaten:*
Kugelkoordinaten mit Zentrum in x:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + r\cos\varphi_1, \\ y_2 &= x_2 + r\sin\varphi_1 \cos\varphi_2, \\ y_3 &= x_3 + r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3, \\ \dots & \quad \dots \\ y_{n-1} &= x_{n-1} + r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}, \\ y_n &= x_n + r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}. \end{aligned}$$

[3] λ_n = Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^n$.

$$Q_R := \{\xi \in I\!R^n : \ 0 \le \xi_1 < R, \\ 0 \le \xi_k < \pi \quad (k = 2, \ldots, n-1), 0 \le \xi_n < 2\pi\}.$$

Die Abbildung $T : Q_R \to T(Q_R) = B_R(x)$ sei durch die obige Substitution definiert:

$$y = T(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}), \quad (r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \in Q_R.$$

T ist bijektiv, abgesehen von der Nullmenge

$$\{(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) | \ 0 \le r < R, \\ 0 \le \varphi_k < \pi \ (k = 1, \ldots, n-2), \varphi_{n-1} = 0\}.$$

Es gilt:

$$\det T'(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = \\ = r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \sin\varphi_{n-2} \quad (\ge 0).$$

Die Transformationsformel ergibt für $f \in L^1(B_R(x))$:

$$\int\limits_{B_R(x)} f(y)dy =$$

$$= \int\limits_{Q_R} f(T(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})) |\det T'(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})| dr d\varphi_1 \cdot \ldots \cdot d\varphi_{n-1}$$

(Fubini)

$$= \int\limits_0^R r^{n-1} \Big(\int\limits_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1 \Big(\ldots$$

$$\ldots \Big(\int\limits_0^\pi \sin\varphi_{n-2} \Big(\int\limits_0^{2\pi} f(T(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})) d\varphi_{n-1} \Big) d\varphi_{n-2} \Big) \ldots \Big) d\varphi_1 \Big) dr.$$

Spezialfall: $f(y) = f(|x-y|)$.

$$\int\limits_{B_R(x)} f(|x-y|)dy = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^R r^{n-1} f(r) dr$$

($\Gamma =$ Gamma-Funktion; $r = |x-y|$).

FOLGERUNG *Sei $f \in C(S_R(x))$. Dann gilt:*

$$\int\limits_{S_R(x)} f(y)d\sigma = R^{n-1}\int\limits_0^{\pi} \sin^{n-1}\varphi_1\Big(\ldots$$
$$\ldots\Big(\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_{n-2}\Big(\int\limits_0^{2\pi} f(T(R,\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}))d\varphi_{n-1}\Big)d\varphi_{n-2}\Big)\ldots\Big)d\varphi_1.$$

Beweis (für $f \in C(\overline{B_R(x)})$). - Für $0 < r < R$ gilt:

$$\int\limits_{B_r(x)} f(y)dy = \int\limits_0^r \Big(\int\limits_{S_\rho(x)} f(y)d_y\sigma\Big)d\rho$$

(vgl. 2.). Andererseits wurde oben gezeigt:

$$\int\limits_{B_r(x)} f(y)dy = \int\limits_0^r \rho^{n-1}\Big(\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-2}\varphi_1\Big(\ldots$$
$$\ldots\Big(\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi_{n-2}\Big(\int\limits_0^{2\pi} f(T(\rho,\varphi_1,\ldots,\varphi_n))d\varphi_{n-1}\Big)d\varphi_{n-2}\Big)\ldots\Big)d\varphi_1\Big)d\rho.$$

Die Bildung der einseitigen Ableitung nach r an der Stelle $r = R$ liefert die Behauptung. ■

4 Definition der Fundamental-Lösung E_3 der dreidimensionalen Wellengleichung:

Die Distribution $E_3 : C_c^\infty(\mathbb{R}^4) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$< E_3, \varphi >= \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\left(\int\limits_{S_{at}(0)} \varphi(x,t)d\sigma\right)dt,\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^4).$$

Es gilt:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\left(\int\limits_{S_{at}(0)} \varphi(x,t)d\sigma\right)dt = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x,\frac{|x|}{a})}{|x|}dx\ \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\ \ (n \geq 2).$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{1}{t}\left(\int_{S_{at}(0)} \varphi(x,t)d\sigma\right) dt = \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{t}\left(\int_{|x'|<at} \varphi(x',\sqrt{a^2t^2-|x'|^2},t)\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-|x'|^2}}dx'\right) dt \\
&\quad + \int_0^\infty \frac{1}{t}\left(\int_{|x'|<at} \varphi(x',-\sqrt{a^2t^2-|x'|^2},t)\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-|x'|^2}}dx'\right) dt \\
&\quad \text{(Fubini)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \frac{1}{t}\mathcal{X}_{B'_{at}(0)}(x')\varphi(x',\sqrt{a^2t^2-|x'|^2},t)\frac{at}{\sqrt{\cdots}}dt\right) dx' \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \frac{1}{t}\mathcal{X}_{B'_{at}(0)}(x')\varphi(x',-\sqrt{a^2t^2-|x'|^2},t)\frac{at}{\sqrt{\cdots}}dt\right) dx';
\end{aligned}$$

(Transformation $\xi = \sqrt{a^2t^2-|x'|^2}$ bzw. $\eta = -\sqrt{a^2t^2-|x'|^2}$:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{|x'|}{a} \Longleftrightarrow \xi = 0, \quad t=\infty \Longleftrightarrow \xi = \infty, \\
t &= \frac{|x'|}{a} \Longleftrightarrow \eta = 0, \quad t=\infty \Longleftrightarrow \eta = -\infty; \\
a^2t^2 &= \xi^2+|x'|^2 = |x|^2 \quad \text{mit} \quad x=(x',\xi), \\
a^2t^2 &= \eta^2+|x'|^2 = |x|^2 \quad \text{mit} \quad x=(x',\eta).)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^\infty \frac{1}{|x|}\varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)d\xi\right) dx' \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{1}{|x|}\varphi\left(x,\frac{|x|}{a}\right)d\eta\right) dx' \\
&\quad \text{(Fubini)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x,\frac{|x|}{a})}{|x|}dx.
\end{aligned}$$

□

Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$:

$B_r = B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ (Euklidische Norm).

$$\omega_n := \text{Volumen von } B_1 := \lambda_n(B_1) \; (= \text{Lebesgue-Maß von } B_1)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\pi^m}{m!} & \text{für } n = 2m, \\[2ex] \dfrac{2^{m+1}\pi^m}{(2m+1)(2m-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1} & \text{für } n = 2m+1 \\ & (m = 1,2,\ldots). \end{cases}$$

Flächeninhalt der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$:

$S_r = S_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| = r\}$.

$$\Sigma_n := \text{Flächeninhalt in } S_1$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2\pi^m}{(m-1)!} & \text{für } n = 2m, \\[2ex] \dfrac{2\pi^m}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}} & \text{für } n = 2m+1 \\ & (m = 1,2,\ldots). \end{cases}$$

Eigenschaften:

1. $\boxed{\Sigma_n = n\omega_n.}$
2. $\Sigma_2 = 2\pi$, $\Sigma_3 = 4\pi$, $\Sigma_4 = 2\pi^2$, $\Sigma_5 = \frac{8}{3}\pi^2$, $\Sigma_6 = \pi^3$, $\Sigma_7 = \frac{16}{15}\pi^3$.
   Es gilt: $\Sigma_7 = \max\{\Sigma_n \mid n = 1,2,\ldots\}$. $\lim_{n\to\infty} \Sigma_n = 0$.
3. $\boxed{\begin{array}{l} \lambda_n(B_r) = r^n\lambda_n(B_1) = \omega_n r^n. \\ \text{Flächeninhalt von } S_r = \Sigma_n r^{n-1}. \end{array}}$

■