Produkt-Maße

Bezeichnungen:

$$\mathcal{B}(I\!R^n) := \sigma\text{-Algebra der Borel-Mengen des } I\!R^n,$$

$$\mathcal{L}(I\!R^n) := \sigma\text{-Algebra der Lebesgue-meßbaren Mengen des } I\!R^n,$$

$$\lambda_n^* := \text{äußeres Lebesgue-Maß in } I\!R^n,$$

$$\lambda_n := \lambda_n^*\Big|_{\mathcal{L}(I\!R^n)} = \text{Lebesgue-Maß},$$

$$\beta_n := \lambda_n\Big|_{\mathcal{B}(I\!R^n)} = \text{Borel-Lebesgue-Maß}.$$

Es gelten folgende Aussagen.

Satz 1. $\lambda_p^* \times \lambda_q^* = \lambda_{p+q}^*$.

Satz 2.

2.1 $\mathcal{L}(I\!R^p) \times \mathcal{L}(I\!R^q) \subset \mathcal{L}(I\!R^{p+q})$ (echte Inklusion).

2.2 $\lambda_p \times \lambda_q \neq \lambda_{p+q}$.

Satz 3. (*Vervollständigung von* $\mathcal{L}(I\!R^p) \times \mathcal{L}(I\!R^q)$ *und* $\lambda_p \times \lambda_q$).

3.1 $\overline{\mathcal{L}(I\!R^p) \times \mathcal{L}(I\!R^q)}^{\lambda_p \times \lambda_q} = \mathcal{L}(I\!R^{p+q})$,

3.2 $\overline{\lambda_p \times \lambda_q} = \lambda_{p+q}$.

Satz 4.

4.1 $$\mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^q) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}),$$

4.2 $$\beta_p \times \beta_q = \beta_{p+q}.$$

Bemerkung Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maß-Räume. Es gelte $\mathcal{B} \neq \mathcal{P}(Y)$.

Seien $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$, und $B \in \mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{B}$. Für die Menge $E := A \times B$ gilt:

$$E \notin \mathcal{A} \times \mathcal{B},$$

$$E \subset A \times Y, \qquad (\mu \times \nu)\,(A \times Y) = 0,$$

d.h. wenn $\mathcal{B} \neq \mathcal{P}(Y)$, so ist das Produkt-Maß $\mu \times \nu$ **nicht** vollständig (insbesondere impliziert die Vollständigkeit von μ und ν nicht die Vollständigkeit von $\mu \times \nu$).