Sobolev-Räume

Joachim Naumann
Humboldt-Universität Berlin

Teil einer Ausarbeitung der Vorlesung
„Höhere Analysis II“
(Lineare Partielle Differentialgleichungen)

Sommersemester 2005

Internet-Seiten:

1. ALBER, H.D.: *Variationsrechnung und Sobolevräume.* Vorlesungsskript.
   http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/ags/ag6/Skripten/Skripten_Alber.pdf

2. NAUMANN, J.: *Remarks on the prehistory of Sobolev spaces.* Preprint Nr. 2002-2; Humboldt-Univ., Inst. f. Math.
   http://www.mathematik.hu-berlin.de/publ./pre/2002/M-02-2.html

3. SÄNDIG, A.-M.: *Distributionentheorie mit Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen.* Vorlesung im Wintersemester 2004/2005. Vorlesungsskript 2005/003.
   http://preprints.ians.uni-stuttgart.de

4. TARTAR, L.: *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces.* Lecture Notes.
   http://www.math.cmu.edu/cna/publications.html
   Diese Ausarbeitung enthält einige Hinweise auf die historische Entwicklung der Begriffe „*verallgemeinerte Ableitung*“ und „*Distribution*“. Der Autor verweist auf einige persönliche Erinnerungen in der Einleitung sowie in Fußnoten.

„Es ist heutzutage ein sehr hartes Los, mathematische Bücher zu schreiben, zumal astronomische. Wahrt man nicht die gehörige Feinheit in den Sätzen, Erläuterungen, Beweisen und Schlüssen, so ist das Buch kein mathematisches. Wahrt man sie aber, so wird die Lektüre sehr beschwerlich, besonders in der lateinischen Sprache, die keine Artikel besitzt und jener Anmut entbehrt, die der griechischen Sprache eignet, wenn sie im geschriebenen Wort zu uns spricht. Daher gibt es heute nur sehr wenige tüchtige Leser; die übrigen lehnen die Lektüre überhaupt ab. Wie viele Mathematiker gibt es, die die Mühe auf sich nehmen, die Kegelschnitte des Apollonius von Pergae ganz durchzulesen? Und doch ist dieser Stoff von der Art, daß er sich viel leichter durch Figuren und Linien darstellen läßt als der astronomische.

Ich selber, der ich als Mathematiker gelte, ermüde beim Wiederlesen meines Werkes mit den Kräften des Gehirns, indem ich den Sinn der Beweise, den ich doch selber ursprünglich mit meinem Verstand in die Figuren und den Text hineingelegt habe, aus den Figuren heraus mir in meinem Verstand wieder vergegenwärtigen will. Beuge ich der schweren Verständlichkeit des Stoffs durch eingestreute Umschreibungen vor, so erscheine ich in mathematischen Dingen schwatzhaft, und das ist der entgegengesetzte Fehler.

Denn auch die Weitläufigkeit in der Ausdrucksweise beeinträchtigt die Verständlichkeit, und zwar nicht weniger als knappe Dastellung. Diese entgeht den Augen des Verstandes, jene zieht sie ab. [1] *Diese hat Mangel an Licht, jene krankt an Überfülle des Glanzes. Hier wird das Auge gar nicht erregt, dort wird es geblendet.*

Daher habe ich den Plan gefaßt, durch eine ausführliche Einleitung in dieses Werk das Verständnis des Lesers zu unterstützen, soweit dies möglich ist.

Diese gestaltete ich doppelt. Zunächst bringe ich eine Übersichtstafel über alle Kapitel des Buches. Da der Stoff dem Wissen vieler Leser ferne liegt, die verschiedene Fachausdrücke, wie die verschiedenen in Angriff genommenen Fragen einander recht ähnlich sind und ihrer Art nach oder in einzelnen Teilen eng miteinander zusammenhängen, so wird jene Tabelle meines Erachtens insofern Nutzen bringen, als sich durch Zusammenstellung aller Fachausdrücke und aller Fragen diese mit einem Blick erfassen lassen und bei gegenseitiger Vergleichung einander erklären.“

Kepler, J.: *Astronomia Nova.* Prag, 1609.
[Nachdruck: *Johannes Kepler. Gesammelte Werke.* Bd. III: Astronomia Nova. Hrsg. M. Caspar, C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1937.]

[1] Diese (Knappheit) entgeht dem Verstand, jene (Weitläufigkeit) zieht die Augen vom Wesentlichen ab (vgl. Kepler, J. *Neue Astronomie.* Übersetzt und eingeleitet von M. Caspar. Oldenburg, München-Berlin 1929; S. 19; s. auch Nachdruck dieser Ausgabe, Hrsg. F. Krafft, Marix Verlag, Wiesbaden 2005).

Bezeichnungen:

Multi-Indizes:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \alpha_i \in \{0\} \cup \mathbb{N} \ \ (i = 1, \ldots, N), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i, \\
\alpha + \beta &:= (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_N + \beta_N), \\
\beta &\leq \alpha \text{ bedeutet: } \beta_i \leq \alpha_i \text{ für } i = 1, \ldots, N, \\
\binom{\alpha}{\beta} &:= \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \binom{\alpha_N}{\beta_N} \text{ für } \beta \leq \alpha.
\end{aligned}
$$

Partielle Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
D^\alpha u &= \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_n}} \quad \text{partielle Ableitung bez.} \quad \alpha, \\
D_i u &= \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad [\alpha = e_i], \\
Du &= (D_1 u, \ldots, D_N u) \quad \text{Gradient von} \quad u.
\end{aligned}
$$

.

Kapitel I. Schwache Ableitung

1. Definition. Beispiele

Wir beginnen mit einer Bemerkung, die der Motivation des Begriffs der schwachen Ableitung einer Funktion dient.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Für jede Funktion $u \in C^1(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi dx = -\int_\Omega u\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(\Omega) \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{1}$$

Für $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ ist das Kompaktum $K_\varphi = \operatorname{supp}(\varphi)$ in Ω enthalten. Daher sind die Funktionen $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\varphi$ und $u\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ über Ω integrierbar.

Da weder $\partial\Omega$ noch ∂K_φ differenzierbare Mannigfaltigkeiten zu sein brauchen, kann (1) nicht durch partielle Integration über $\partial\Omega$ oder ∂K_φ bestätigt werden. Die Gültigkeit von (1) erhält man aber mit jeder der folgenden beiden elementaren Überlegungen:

- Betrachtung von $\dfrac{1}{t}[u(x + te_i) - u(x)]\varphi(x)$ für $x \in K_\varphi,\ 0 < |t| < \operatorname{dist}(K_\varphi, \partial\Omega)$; Substitution $y = x + te_i$ $[x \in K_\varphi,\ e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)]$; Grenzübergang $t \to 0$;

- definiere

$$f(x) := \begin{cases} u(x)\varphi(x) & \text{für} \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega; \end{cases}$$

  K_φ in einen offenen Würfel einschließen; Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung auf $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ bez. der Variablen x_i anwenden; Satz von Fubini anwenden.

Weniger elementar ist die folgende Argumentation zum Nachweis der Gültigkeit von (1): Einfügen einer C^∞-Mannigfaltigkeit in $\Omega \setminus K$ (ein Satz von Sard ermöglicht dies lokal); partielle Integration von $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\varphi$ über diese Mannigfaltigkeit. ∎

Die Gleichung in (1) kann induktiv für partielle Ableitungen höherer Ordnung bewiesen werden.

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *offen,* $m \in \mathbb{N}$. *Für* $u \in C^m(\Omega)$ *und alle Multi-Indizes* α *mit* $1 \leq |\alpha| \leq m$ *gilt*:

$$(1') \qquad \int_\Omega (D^\alpha u)\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx \quad \forall\, \varphi \in C_c^m(\Omega).$$

■

Untersuchungen über Minimum-Probleme für Funktionale, die durch Integrale definiert sind, sowie über Randwert-Probleme für partielle Differentialgleichungen führten B. Levi, O. Nikodym, J. Leray, K. O. Friedrichs, S. L. Sobolev und Ch. B. Morrey zur Betrachtung von Funktionen u, für die der klassische Begriff der partiellen Ableitung $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ in einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ungeeignet ist. Es stellte sich heraus, daß für diese Untersuchungen Funktionen geeignet sind, die partielle Ableitungen in einem verallgemeinerten (d. h. abgeschwächten) Sinne besitzen, so daß funktionalanalytische Methoden zum Studium oben genannter Probleme herangezogen werden können. Für solche Methoden bilden die L^p-Räume einen geeigneten Rahmen. Die Gleichungen in (1) bzw. (1') zeigen, in welchem Sinne für eine L^p-Funktion eine partielle Ableitung erklärt werden kann.

Die verschiedenen Verallgemeinerungen des (klassischen) Begriffs der partiellen Ableitung einer Funktion führten schließlich zu folgender

1.1 Definition *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen. Seien* $p, q \in [1, +\infty], \alpha$ *Multi-Index.* $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ *hat die* **schwache Ableitung** $v_\alpha \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$, *wenn*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \varphi dx \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

1.2 Bemerkungen 1. Sei $w_\alpha \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$ eine weitere Funktion mit

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega w_\alpha \varphi dx \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Dann gilt

$$\int_\Omega (v_\alpha - w_\alpha)\varphi dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Satz... liefert: $v_\alpha - w_\alpha = 0$ f. ü. in Ω. Daher ist die schwache Ableitung im Sinne von Definition 1.1 eindeutig bestimmt.

2. Die Zuordnung $u \mapsto D^\alpha u$ ist eine lineare Abbildung:

$$D^\alpha(u_1 + u_2) = D^\alpha u_1 + D^\alpha u_2, \quad D^\alpha(\lambda u) = \lambda D^\alpha u \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dies folgt unmittelbar aus Definition 1.1.

3. Seien α und β Multi-Indizes. Besitzt $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ die schwachen Ableitungen $D^\alpha u, D^\beta(D^\alpha u) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, so gilt

$$D^{\alpha+\beta} u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega), \quad D^{\alpha+\beta} u = D^\beta(D^\alpha u) \quad \text{f. ü. in} \quad \Omega.$$

Diese Aussage erhält man ebenfalls leicht aus Definition 1.1. Eine analoge Aussage gilt im Falle der Existenz der schwachen Ableitungen $D^\beta u, D^\alpha(D^\beta u) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

4. Für $u \in C^m(\Omega)(m \in \mathbb{N}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen) sind u und alle (punktweise gebildeten) partiellen Ableitungen $D^\alpha u(1 \leq |\alpha| \leq m)$ zu jeder Potenz $p \in [1, +\infty[$ lokal in Ω integrierbar. Wegen (1.1') kann $D^\alpha u$ daher mit der schwachen Ableitung von u bez. α identifiziert werden.

Für die schwache Ableitung einer L^p-Funktion benutzen wir die gleiche Bezeichnung wie für die partielle Ableitung einer Funktion aus $C^{|\alpha|}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} D^{(0,\dots,0)} u &:= u, \\ D_i u &:= v_{e_i} \quad (i = 1, \dots, N), \\ D^\alpha u &:= v_\alpha \quad (|\alpha| \geq 2). \end{aligned}$$

■

1.3 Bemerkung (*Schwache Ableitung und Ableitung im Distributionensinne*) Jede Funktion $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ kann mit einer Distribution $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ identifiziert werden:

$$\langle T_u, \varphi \rangle := \int_\Omega u \varphi dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Im Sinne von $\mathcal{D}'(\Omega)$ besitzt T_u Ableitungen beliebiger Ordnung nach allen Variablen (vgl...).

Die Funktion $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ habe die schwache Ableitung $v_\alpha \in L^q_{\text{loc}}(\Omega)$. Bezeichnet wie oben $T_{v_\alpha} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ die durch v_α erzeugte Distribution, so gilt

$$\langle D^\alpha T_u, \varphi \rangle \quad = \quad (-1)^{|\alpha|} \langle T_u, D^\alpha \varphi \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx \\
&= \int\limits_{\Omega} v_{\alpha} \varphi dx \\
&= \langle T_{v_\alpha}, \varphi \rangle
\end{aligned}
$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, d.h.

$$D^\alpha T_u = T_{v_\alpha} \quad \text{in} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

$\blacksquare$

Beispiele

$\boxed{1}$ **Absolut-stetige Funktionen**

Definition *Eine Funktion* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *heißt* **absolut-stetig auf** $[a,b]$, *wenn*

$$
\begin{cases}
\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) < 0, \textit{so daß für jedes} \\
\textit{endliche System von disjunkten Teilintervallen} \\
[a_1, b_1], \ldots, [a_m, b_m] \quad \textit{von} \quad [a,b] \quad \textit{mit} \quad \sum\limits_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \le \delta \ \ \textit{gilt}: \\
\qquad \sum\limits_{i=1}^{m} |u(b_i) - u(a_i)| \le \varepsilon.
\end{cases}
$$

Jede Lipschitz-stetige Funktion ist absolut-stetig.
Die folgenden Aussagen 1° und 2° sind äquivalent:

1° *u ist absolut-stetig auf* $[a,b]$,

2° *es existiert* $U \in L^1(a,b)$, *so daß*

$$u(t) = u(a) + \int\limits_a^t U(s) ds \quad \forall t \in [a,b].$$

Aus 2° folgt, daß $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(t+h) - u(t)}{h}$ für f. a. $t \in]a,b[$ existiert; dabei gilt: $u'(t) = U(t)$ für f. a. $t \in]a,b[$.

Für absolut-stetige Funktionen u und v auf $[a,b]$ gilt die bekannte Formel der partiellen Integration:

$$(2) \qquad \int_a^b u'(t)v(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Hieraus folgt für absolut-stetige Funktionen u auf $[a,b]$:

$$\int_a^b u'(t)\varphi(t)dt = -\int_a^b u(t)\varphi'(t)dt \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(]a,b[),$$

d.h. die für f. a. $t \in [a,b]$ existierende Ableitung $u'(t)$ ist Repräsentant der schwachen Ableitung erster Ordnung von u in $]a,b[$.

Als Beispiel einer absolut-stetigen Funktion betrachten wir

$$u(t) := |t|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$u'(t) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad t \in]-\infty, 0[, \\ 1 & \text{für} \quad t \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

Identifiziert man u' mit dem Element aus $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, das u als Repräsentant enthält, so ist dieses die schwache Ableitung erster Ordnung von u in $]a,b[$.

Die schwache Ableitung u' von u kann auch direkt durch Nachweis der definierenden Gleichung bestimmt werden. In der Tat, sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist $\operatorname{supp}(\varphi) \subset]-a,a[$ für geeignetes $a > 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u(t)\varphi'(t)dt &= -\int_{-a}^{0} t\varphi'(t)dt + \int_0^a t\varphi'(t)dt \\ &= -\left(a\varphi(-a) - \int_{-a}^{0} \varphi(t)dt\right) + a\varphi(a) - \int_0^a \varphi(t)dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} (\operatorname{sign}(t))\varphi(t)dt, \quad [\text{denn } \varphi(-a) = \varphi(a) = 0] \end{aligned}$$

d. h.

$$u'(t) = \operatorname{sign}(t) \quad \text{für f. a.} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{2}$ **Cantorsche Treppenfunktion** ψ. Für diese Funktion gilt:

- *ψ ist* HÖLDER-*stetig, aber nicht absolut-stetig auf* $[0,1]$;

- $\psi'(t)=0$ *für f. a.* $t\in[0,1]$, *jedoch ist* ψ' **nicht** *schwache Ableitung von* ψ *auf* $[0,1[$.

- *wird* ψ *mit einer Distribution* T_ψ *in* $]0,1[$ *identifiziert, so besitzt* T_ψ *Ableitungen beliebiger Ordnung; die erste Ableitung* T'_ψ *repräsentiert ein stetiges lineares Funktional auf einem Raum* HÖLDER-*stetiger Funktionen.*

(s. `http://www.math.hu-berlin.de/~jnaumann/cantor.ps`).

$\boxed{3}$ **Heaviside-Funktion** H:

$$H(t):=\begin{cases}0 & \text{für} \quad t\in\,]-\infty,0[,\\ 1 & \text{für} \quad t\in[0,+\infty[.\end{cases}$$

Die Funktion H *besitzt auf keinem Intervall* $]-a,a[$ $(a>0$ *beliebig*) *eine lokal-integrierbare schwache Ableitung.* In der Tat, angenommen, es gäbe $g\in L^1_{\text{loc}}(-a,a)$, so daß

$$\int_{-a}^{a} H\varphi' dt = -\int_{-a}^{a} g\varphi dt \quad \forall \varphi\in C_c^\infty(]-a,a[),$$

d. h.

$$(*) \qquad \int_{-a}^{a} g\varphi dt = -\int_{0}^{a}\varphi' dt=\varphi(0) \quad \forall\, \varphi\in C_c^\infty(]-a,a[).$$

Für $\varphi\in C^\infty(]-a,a[)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi)\subset\,]-a,0[$ bzw. $\operatorname{supp}(\varphi)\subset\,]0,a[$ folgt aus $(*)$:

$$g(t)=0 \quad \text{für f. a.} \quad t\in[-a,a].$$

Das ergibt einen Widerspruch, wenn man in $(*)$ Funktionen $\varphi\in C_c^\infty(]-a,a[)$ mit $\varphi(0)\neq 0$ betrachtet.

Die soeben bewiesene Aussage folgt auch aus der Tatsache, daß die (in 0 konzentrierte) δ-Distribution nicht regulär ist, denn $(*)$ würde bedeuten

$$\langle\delta_{(0)},\varphi\rangle=\varphi(0)=\int_{-a}^{a} g\varphi dt \quad \forall\,\varphi\in C_c^\infty(]-a,a[)$$

(vgl....)

$\boxed{4}$ **Die Funktion** $\dfrac{1}{|x-x_0|^\lambda}$. Seien $x_0\in\mathbb{R}^N$ $(N\geq 2)$ und $0<\lambda<N$ fixiert. Definiere

$$u(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x-x_0|^\lambda} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}, \\ 0 & \text{für} \quad x = x_0. \end{cases}$$

Sei $1 \leq p < \dfrac{N}{\lambda}$. Mit Hilfe einer Transformation auf Kugelkoordinaten mit Zentrum in x_0 erhält man

$$\int\limits_{B_r(x_0)} |u|^p dx = \frac{\text{mes} S_1}{N - \lambda p} r^{N-\lambda p} \quad \forall\, r > 0.$$

Also:

$$u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N), \quad u \notin L^p(\mathbb{R}^N).$$

In Abschn. II.5 werden wir eine Abschätzung für $\int\limits_E u dx$ herleiten, wobei E eine meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ mit $\lambda_N(E) < +\infty$ ist.

$\boxed{4.1}$ Definiere

$$v_i(x) := \begin{cases} (-\lambda)\dfrac{x_i - x_{0i}}{|x-x_0|^{\lambda+2}} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}, \\ 0 & \text{für} \quad x = x_0. \end{cases}$$

$(i = 1, \ldots, N)$. v_i ist in $\mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}$ die partielle Ableitung erster Ordnung von u nach x_i.

Seien $0 < \lambda < N - 1$ und $1 \leq q < \dfrac{N}{\lambda + 1}$. Dann gilt:

$$v_i \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N), \quad v_i \notin L^q(\mathbb{R}^N) \quad (i = 1, \ldots, N).$$

In der Tat, die erste Aussage folgt aus der Ungleichung

$$\int\limits_{B_r(x_0)} |v_i|^q dx \leq \frac{\lambda^q \text{mes} S_1}{N - (\lambda+1)q}\, r^{N-(\lambda+1)q} \quad \forall\, r > 0,$$

die man wie oben durch Transformation auf Kugelkoordinaten mit Zentrum in x_0 beweist. Mit dieser Transformation läßt sich auch $v_i \notin L^q(\mathbb{R}^N)$ zeigen. Dies ist z. B. für $i = N$ aus der Formel

$$\int\limits_{B_r(x_0)} |v_N|^q dx = \lambda^q K_N \int\limits_0^r \rho^{N-1-(\lambda+1)q} d\rho$$

ersichtlich; hierbei ist

$$K_N = \int\limits_0^\pi \sin\theta_1 d\theta_1 \int\limits_0^\pi (\sin\theta_2)^2 d\theta_2 \cdot \ldots \cdot \int\limits_0^\pi (\sin\theta_{N-2})^{N-2} |\cos\theta_{N-2}|^q d\theta_{N-2} > 0.$$

$\boxed{4.2}$ v_i ist die schwache Ableitung von u nach x_i in $\mathbb{R}^N$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_i\varphi dx \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \quad (i = 1, \ldots, N).$$

In der Tat, sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Wir wählen $B_r(x_0)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_r(x_0)$. Für ε mit $0 < \varepsilon < r$ gilt

$$(+) \qquad \int\limits_{B_r(x_0)\smallsetminus B_\varepsilon(x_0)} v_i\varphi dx = \frac{1}{\varepsilon^\lambda}\int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} n_i\varphi dS - \int\limits_{B_r(x_0)\smallsetminus B_\varepsilon(x_0)} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx;$$

hierbei bezeichnet n_i die i-te Komponente der äußeren Einheitsnormale bez. $B_r(x_0) \smallsetminus B_\varepsilon(x_0)$ längs der Sphäre $S_\varepsilon(x_0)$. Wir erhalten

$$\frac{1}{\varepsilon^\lambda}\Bigg|\int\limits_{S_\varepsilon(x_0)} n_i\varphi dS\Bigg| \le \operatorname{mes}S_1 \cdot \max_{\mathbb{R}^N}|\varphi| \cdot \varepsilon^{N-1-\lambda}.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ in (+) liefert die Behauptung.

Aufgaben I.1

In den Übungen 1.1 und 1.2 werden Funktionen u betrachtet, deren schwache Ableitungen erster Ordnung andere Integrierbarkeitseigenschaften als u besitzen. Sei $N \ge 2$.

$\boxed{\text{A I.1.1}}$ Sei $x_0 \in \mathbb{R}^N$ fixiert. Definiere

$$u(x) \quad := \quad \begin{cases} \log|x - x_0| & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}, \\ 0 & \text{für} \quad x = x_0; \end{cases}$$

$$v_i(x) \quad := \quad \begin{cases} \dfrac{x_i - x_{0i}}{|x - x_0|^2} & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x_0\}, \\ 0 & \text{für} \quad x = x_0. \end{cases}$$

Man beweise folgende Aussagen.

1) Sei $1 \le p < +\infty$. Dann gilt:
$$\int\limits_{B_r(x_0)} |u|^p dx < +\infty \quad \forall\ r > 0.$$

2) Sei $1 \le q < N$. Dann gilt:
$$\int\limits_{B_r(x_0)} |v_i|^q dx < +\infty \quad \forall r > 0.$$

3) Es gilt:
$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^N} v_i\varphi dx \quad \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

$\boxed{\text{A I.1.2}}$ Definiere:

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| > e\}; \quad u(x) := \log\log|x|, \quad x \in \Omega.$$

Die partielle Ableitung erster Ordnung von u nach x_i ist

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{|x|^2 \log|x|}, \ x \in \Omega \quad (i = 1, \ldots, N).$$

Man beweise:

1) für $1 \leq p < +\infty$ gilt: $u \notin L^p(\Omega), \quad u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega), \quad \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$;

2) für $N \leq q \leq +\infty$ gilt: $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^q(\Omega)$.

$\boxed{\text{A I.1.3}}$ Für $0 < \lambda < +\infty$ und $x \in \mathbb{R}^N$ definiere

$$u(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{|x|^\lambda} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Für welche $1 \leq p < +\infty$ gilt

$$D_i u \in [L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)]^N \quad (i = 1, \ldots, N)?$$

$\boxed{\text{A I.1.4}}$ *Die Existenz einer schwachen Ableitung der Ordnung $m \geq 2$ braucht nicht die Existenz schwacher Ableitungen der Ordnungen $\leq m-1$ zu implizieren.*
Seien $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Definiere

$$u(x) := f(x_1) + g(x_2) \ \text{ für f. a. } \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Dann gilt $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Für die Multi-Indizes $\alpha = (1,0)$ und $\beta = (0,1)$ brauchen die schwachen Ableitungen $D^\alpha u$ und $D^\beta u$ nicht zu existieren. Man beweise, daß jedoch gilt:

$$D^{\alpha+\beta} u = 0 \quad \text{f. ü.} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N.$$

$\boxed{\text{A I.1.5}}$ *„Zusammenkleben" von Funktionen und deren schwache Ableitungen.*
Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^N$ offene Mengen mit $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. Seien $u_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega_i)$ $(i = 1,2)$ Funktionen mit

$$u_1(x) = u_2(x) \ \text{ für } \ \text{f. a. } \ x \in \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

Für einen Multi-Index α mögen die schwachen Ableitungen $D^\alpha u_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega_i)$ $(i = 1,2)$ existieren. Definiere $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$ und

$$u(x) := \begin{cases} u_1(x) & \text{für} \quad \text{f. a.} \quad x \in \Omega_1, \\ u_2(x) & \text{für} \quad \text{f. a.} \quad x \in \Omega_2, \end{cases}$$

$$v_\alpha(x) := \begin{cases} D^\alpha u_1(x) & \text{für} \quad \text{f. a.} \quad x \in \Omega_1, \\ D^\alpha u_2(x) & \text{für} \quad \text{f. a.} \quad x \in \Omega_2, \end{cases}$$

Man beweise: $u, v_\alpha \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und

$$\int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega v_\alpha \varphi dx \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

2. Einige Eigenschaften der schwachen Ableitung

Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz einer schwachen Ableitung

1.3 Satz *Seien* $1 < p \leq +\infty$, α *ein Multi-Index. Für* $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *sind äquivalent:*

1° *es existiert die schwache Ableitung* $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$*;*

2° *es existiert eine Konstante* C*, so daß*

$$\Big| \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx \Big| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \quad \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Beweis Die Implikation $1^\circ \Longrightarrow 2^\circ$ mit $C = \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$ ergibt sich direkt aus der Definition der schwachen Ableitung.

Wir beweisen die Implikation $2^\circ \Longrightarrow 1^\circ$. Aus 2° folgt, daß

$$\varphi \mapsto \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

ein lineares stetiges Funktional auf $C_c^\infty(\Omega)$ bezüglich der $L^{p'}$-Norm ist. Da $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $L^{p'}(\Omega)$ ist, kann dieses Funktional in eindeutiger Weise zu einem linearen stetigen Funktional auf ganz $L^{p'}(\Omega)$ fortgesetzt werden. Der Darstellungssatz von Riesz für solche Funktionale liefert nun Existenz und Eindeutigkeit eines $g_\alpha \in L^p(\Omega)$, so daß

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = \int_\Omega g_\alpha \varphi dx \quad \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Die Funktion $v_\alpha := (-1)^{|\alpha|} g_\alpha$ ist die schwache Ableitung von u zum Multi-Index α. ∎

Lokale Approximation durch C^∞-Funktionen

Viele Eigenschaften von Funkionen $u \in L^p(\Omega)$, die schwache Ableitungen besitzen, können durch eine lokale Approximation von u mittels C^∞-Funktionen bewiesen werden. Wir stellen für eine dieser Approximationsmethoden die erforderlichen Bezeichnungen bereit.

Für $x \in \mathbb{R}^N$ sei

$$\omega(x) := \begin{cases} a \exp\left(- \dfrac{1}{1 - |x|^2} \right) & \text{für} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{für} \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

wobei

$$a := \left(\int\limits_{B_1(0)} \exp\left(\frac{1}{1-|x|^2} \right) dx \right)^{-1}.$$

Es gilt:

$$\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^N),\ 0 \le \omega(x) \le a\ \forall\ x \in \mathbb{R}^N,\ \operatorname{supp}(\omega) = \overline{B_1(0)},\ \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega dx = \int\limits_{B_1(0)} \omega dx = 1.$$

Für $x \in \mathbb{R}^N$ und $\rho > 0$ definiere

$$\omega_\rho(x) := \frac{1}{\rho^N} \omega\left(\frac{x}{\rho} \right).$$

Die Funktion ω_ρ besitzt folgende Eigenschaften:

1. $\operatorname{supp}(\omega_\rho) = \overline{B_\rho(0)} \quad \forall\ \rho > 0;$
2. $\lim\limits_{\rho \to 0} \omega_\rho(x) = 0 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},\ \lim\limits_{\rho \to 0} \omega_\rho(0) = +\infty,$
3. $(D^\alpha \omega_\rho)(x) = \dfrac{1}{\rho^{|\alpha|+N}} (D^\alpha \omega)\Big(\dfrac{x}{\rho}\Big) \quad \forall$ Multi-Indizes $\alpha, \quad \forall\ \rho > 0, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^N;$
4. $\int\limits_{B_\rho(0)} \omega_\rho dx = \int\limits_{B_1(0)} \omega dx = 1 \quad \forall \rho > 0.$

■

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^N$ eine meßbare Menge. Sei $u \in L^p(E)$ $(1 \le p \le +\infty)$. Wenn $\lambda_N(\mathbb{R}^N \setminus E) > 0$, so definieren wir

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für f. a.} \quad x \in E, \\ 0 & \text{für f. a.} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus E. \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Definition *Für $u \in L^p(E)$ heißt*

$$u_\rho(x) := \int\limits_{B_\rho(x) \cap E} \omega_\rho(x-y) u(y) dy = \int\limits_{B_1(0)} \omega(z) \tilde{u}(x - \rho z) dz,\ \rho > 0,\ x \in \mathbb{R}^N.$$

FRIEDRICHS**sche Glättung von** u.

Sei $\lambda_N(\mathbb{R}^N \setminus E) > 0$. Für $u \in L^p(E)$ besitzt u_ρ folgende Eigenschaften:

- $\rho > 0$ *fixiert* $\Rightarrow$ $u_\rho(x) = 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}^N, \operatorname{dist}(x, E) > \rho;$
- $x \in \mathbb{R}^N$ *mit* $\operatorname{dist}(x, E) > 0$ *fixiert* $\Rightarrow u_\rho(x) = 0\ \forall\ 0 < \rho < \operatorname{dist}(x, E).$

Wir fassen einige Eigenschaften von u_ρ zusammen.

Satz 1. *Sei $E \subseteq \mathbb{R}^N$ meßbar. Für jedes $u \in L^p(E)$ $(1 \le p < +\infty)$ gilt:*

1.1 $\|u_\rho\|_{L^p(E)} \le \|u\|_{L^p(E)} \quad \forall\, \rho > 0$;

1.2 $\lim\limits_{\rho\to 0} \|u_\rho - u\|_{L^p(E)} = 0$;

1.3 *für jeden Multi-Index α und jedes $\rho > 0$ gilt*

$$(D^\alpha u_\rho)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} D_x^\alpha \omega_\rho(x-y)u(y)dy \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

$$D^\alpha u_\rho \textit{ ist gleichmäßig stetig in } \mathbb{R}^N.$$

2. *Sei $E \subseteq \mathbb{R}^N$ offen.*

2.1 *Sei $u \in C(E)$. Dann gilt für jedes Kompaktum $K \subset E$:*

$$\lim_{\rho\to 0} \|u_\rho - u\|_{C(K)} = 0.$$

2.2 *Sei $u \in L^p(E)$ $(1 \le p < +\infty)$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(E)$, so daß*

$$\|\varphi_\varepsilon - u\|_{L^p(E)} \le \varepsilon.$$

Für ausführliche Darlegungen vgl. „*Approximation of L^p-Functions by Smooth Functions*“ (Preprint-Reihe). ■

Der folgende Satz zeigt, in welchem Sinne die Glättung u_ρ eine schwache Ableitung von u approximiert.

2.1 Satz *$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ habe die schwache Ableitung $D^\alpha u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ $(1 \le p < +\infty)$. Dann gilt für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$:*

1. $(D^\alpha u_\rho)(x) = (D^\alpha u)_\rho(x) \quad \forall\, x \in \Omega', \quad \forall\, 0 < \rho < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$;

2. $\lim\limits_{\rho\to 0} \|D^\alpha u_\rho - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega')} = 0$.

Schwache Ableitung und Differenzen-Abschätzungen

Mit Hilfe von Satz 2.1 erhält man

2.2 Satz *Sei $\Omega' \subset\subset \Omega$.*
1. *Sei $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ $(1 \le p < +\infty)$. Es existiere die schwache Ableitung $D_i u \in L^p(\Omega)$ $(i \in \{1, \ldots, N\})$. Dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega'} |u(x+te_i) - u(x)|^p dx \le |t|^p \int\limits_{\Omega} |D_i u|^p dx \quad \forall\, |t| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega);$$

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{\Omega'}\left|\frac{1}{t}\Big(u(x+te_i)-u(x)\Big)-(D_iu)(x)\right|^p dx = 0.$$

Wenn die schwachen Ableitungen $D_1u,\ldots,D_Nu \in L^p(\Omega)$ existieren, so gilt

$$\int\limits_{\Omega'}|u(x+y)-u(x)|^p dx \le |y|^p\int\limits_{\Omega}|Du|^p dx \quad \forall\ |y| < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega).$$

2. *Für $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(1 < p < +\infty)$ gelte*

$$\int\limits_{\Omega'}|u(x+te_i)-u(x)|^p dx \le C_0|t|^p \quad \forall\ |t| < \mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$$

$(i \in \{1,\ldots,N\}, C_0 = \mathrm{const})$. *Dann existiert die schwache Ableitung $D_iu \in L^p(\Omega')$ und es gilt*

$$\int\limits_{\Omega'}|D_iu|^p dx \le C_0.$$

■

Schwache Differenzierbarkeit und Lipschitz-Stetigkeit

Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, d.h. es existiert $L = \mathrm{const}$, so daß

$$|u(x)-u(y)| \le L|x-y| \quad \forall x,y \in \Omega.$$

Für solche Funktionen gilt folgender

Satz (Rademacher). *Es existieren eine meßbare Menge $\Omega_0 \subset \Omega$ mit $\lambda_N(\Omega_0) = 0$, und meßbare Funktionen $v_i : \Omega \setminus \Omega_0 \to \mathbb{R}$ $(i = 1,\ldots,N)$, so daß*

$$u(x+h)-u(x) = \sum_{i=1}^N v_i(x)h_i + \sigma(x;h) \quad \forall\ x \in \Omega\setminus\Omega_0, \quad \forall\ h \in \mathbb{R}^N, (x+h) \in \Omega,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sigma(x;h)}{|h|} = 0 \quad \forall\ x \in \Omega\setminus\Omega_0.$$

Die Funktion v_i ist die partielle Ableitung von u nach x_i in $\Omega\setminus\Omega_0$; dabei gilt

$$|v_i(x)| \le L \quad \forall\ x \in \Omega\setminus\Omega_0 \quad (i = 1,\ldots,N).$$

2.3 Bemerkung Die Funktion v_i ist die schwache Ableitung in Ω von u nach x_i.In der Tat, sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Setze $K_\varphi := \mathrm{supp}(\varphi)$. Für $0 < |t| < \mathrm{dist}(K_\varphi,\partial\Omega)$ gilt dann $(K_\varphi + \{te_i\}) \subset \Omega$. Wir erhalten

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\frac{\varphi(x-te_i)-\varphi(x)}{-t}dx = -\frac{1}{t}\left(\int\limits_{\{te_i\}+K_\varphi} u(x)\varphi(x-te_i)dx - \int\limits_{K_\varphi} u(x)\varphi(x)dx\right)$$

$$= -\int\limits_{K_\varphi} \frac{u(x+te_i)-u(x)}{t}\varphi(x)dx$$

$$(*) \qquad = -\int\limits_{K_\varphi\cap(\Omega\setminus\Omega_0)} v_i(x)\varphi(x)dx - \int\limits_{K_\varphi\cap(\Omega\setminus\Omega_0)} \frac{\sigma(x;te_i)}{t}\varphi(x)dx$$

(vgl. Beweis von (1), S. 1). Für jede beschänkte offene Menge Ω' mit $K_\varphi \subset \Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$ gilt

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x-te_i)-\varphi(x)}{-t} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x) \quad \text{gleichmäßig} \quad \forall\ x\in\Omega'.$$

Daher kann der Grenzübergang $t \to 0$ unter dem über Ω erstreckten Integral auf der linken Seite von $(*)$ ausgeführt werden. Beachtet man, daß

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sigma(x;te_i)}{t} = 0 \quad \forall\ x\in\Omega\setminus\Omega_0,$$

$$\left|\frac{\sigma(x;te_i)}{t}\right| \le 2L \quad \forall x\in\Omega\setminus\Omega_0, \quad |t|>0 \quad \text{hinreichend klein,}$$

so ergibt sich mit Hilfe des Satzes über die majorisierte Konvergenz

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{K_\varphi\cap(\Omega\setminus\Omega_0)} \frac{\sigma(x;te_i)}{t}\varphi(x)dx = 0.$$

Es folgt

$$\int\limits_{\Omega} u(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)dx = -\int\limits_{K_\varphi\cap(\Omega\setminus\Omega_0)} v_i(x)\varphi(x)dx = -\int\limits_{\Omega} v_i(x)\varphi(x)dx.$$

■

Der folgende Satz beinhaltet die Umkehrung der soeben notierten Aussage lokal in Ω.

2.4 Satz *Für $u\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gelte $Du\in[L^\infty(\Omega)]^N$. Dann existiert eine Funktion $u^*:\Omega\to\mathbb{R}$, so daß*

1. $u^*(x) = u(x)$ *für f. a.* $x \in \Omega$;

2. u^* *ist* LIPSCHITZ-*stetig auf jeder Kugel* $B_r(x_0)$ *mit* $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$.

2.5 Bemerkung Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit LIPSCHITZ-Rand $\partial\Omega$ (vgl. Abschn....). Sei $u \in L^1(\Omega)$ mit $Du \in [L^\infty(\Omega)]^N$. Dann existiert eine Funktion $u^* : \Omega \to \mathbb{R}$, so daß: $u^*(x) = u(x)$ für f. a. $x \in \Omega$, u^* ist LIPSCHITZ-stetig auf Ω. ■

Aufgaben I.2

A I.2.1 Sei $u \in L^p(\Omega)$ mit $D_i u \in L^p(\Omega)$ $(1 \le p < +\infty; i = 1, \dots, N)$. Man beweise für die Mittelfunktion u_ρ:

1. Für jedes $\Omega' \subset\subset \Omega$ gilt

$$\int\limits_{\Omega'} |u_\rho - u|^p dx \le \rho^p \int\limits_{\Omega} |Du|^p dx \ \ \forall\, 0 < \rho < \frac{1}{2}\text{dist}(\Omega', \partial\Omega);$$

2. Wenn $\Omega = \mathbb{R}^N$, so gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_\rho - u|^p dx \le \rho^p \int\limits_{\mathbb{R}^N} |Du|^p dx \quad \forall\, \rho > 0.$$

A I.2.2 **1. Schwache Ableitung von** $f \circ u$ **(**$f \in C^1$**).** Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $|f'(t)| \le C_0 = \text{const}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Für $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ existiere die schwache Ableitung $D_i u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ $(i \in \{1, \dots, N\})$.

Man beweise: es gilt

$$\int\limits_{\Omega} f(u) D_i \varphi dx = -\int\limits_{\Omega} \varphi f'(u) D_i u dx \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

d. h. $f \circ u$ ist in Ω nach x_i schwach differenzierbar und es gilt

$$D_i(f \circ u) = f'(u) D_i u \quad \text{f. ü. in } \Omega.$$

Bemerkungen 1. Nach Voraussetzung ist $f' \in C(\mathbb{R})$. Daher ist $f'(u)$ meßbar auf Ω (hier ist ein Repräsentant von u zu verstehen, der in allen Punkten von Ω reelle Werte annimmt). Da f' außerdem als beschränkt vorausgesetzt wurde, ist $f'(u)$ eine beschränkte meßbare Funktion in Ω.

2. Unter den gleichen Voraussetzungen an f gilt: *Besitzt* $u \in L^p(\Omega)$ *die schwache Ableitung* $D_i u \in L^p(\Omega)$ $(1 \le p \le +\infty;\ i \in \{1, \dots, N\})$, *so besitzt* $f \circ u$ *die schwache Ableitung* $f'(u) D_i u \in L^p(\Omega)$.

2. Schwache Ableitung von $f \circ u$ **(**f **LIPSCHITZ-stetig)** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ LIPSCHITZ-stetig:

$$|f(s) - f(t)| \le L|s - t| \quad \forall\, s, t \in \mathbb{R} \ \ (L = \text{const}).$$

Für $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ existiere die schwache Ableitung $D_i u \in L^p(\Omega)$ $(1 < p < +\infty; i \in \{1, \dots, N\})$. Man beweise:

$$\left| \int\limits_{\Omega} f(u) D_i \varphi dx \right| \le L \|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \ \ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Bemerkung Satz 1.3 (II.2) liefert die Existenz der schwachen Ableitung $D_i(f \circ u) \in L^p(\Omega)$. Da $f'(t)$ nur für fast alle $t \in \mathbb{R}$ existiert und f' nicht stetig zu sein braucht, erfordert die Begründung der Kettenregel für die schwache Ableitung $D_i(f \circ u)$ weitergehende Überlegungen. Dies wird in Abschn. II.6 durchgeführt.

Anhang. Schwache Differenzierbarkeit und absolute Stetigkeit

Kapitel II. Die Räume $W^{m,p}(\Omega)$

1. Definition. Normierung

Wir beginnen mit der folgenden

1.1 Definition *Seien* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *offen,* $m \in \mathbb{N}$ *und* $1 \leq p \leq +\infty$. *Der Vektorraum*

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall\ \alpha \text{ mit } 1 \leq |\alpha| \leq m\ \exists\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

heißt Sobolev-**Raum.**

Durch

$$\|u\|_{m,p} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{für} \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \max\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{für} \quad p = +\infty \end{cases}$$

wird eine Norm auf $W^{m,p}(\Omega)$ definiert: $\Longrightarrow$ Aufgaben. ■

Vollständigkeit, Separabilität und Reflexivität von $W^{m,p}(\Omega)$

1.2 Satz

1. $W^{m,p}(\Omega)$ *ist* Banach-*Raum.*

2. $W^{m,p}(\Omega)$ *ist* Hilbert-*Raum bez. des Skalarproduktes*

$$(u, v)_{m,2} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega (D^\alpha u) D^\alpha v dx.$$

3. *Für* $1 \leq p < +\infty$ *ist* $W^{m,p}(\Omega)$ *separabel.*

4. *Für* $1 < p < +\infty$ *ist* $W^{m,p}(\Omega)$ *reflexiv.*

1.3 Satz

1. $W^{1,1}(\Omega)$ *ist nicht reflexiv.*

2. $W^{1,\infty}(\Omega)$ *ist nicht separabel und nicht reflexiv.* ■

Aufgaben II.1

$\boxed{\text{A II.1.1}}$ Man beweise: Durch

$$\|u\|_{m,p} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{für} \quad 1 \le p < +\infty, \\ \max\limits_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{für} \quad p = +\infty \end{cases}$$

wird eine Norm auf $W^{m,p}(\Omega)$ definiert.

$\boxed{\text{A II.1.2}}$ Für $1 \le p \le +\infty$ wird durch

$$|u|_{m,p} := \sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

eine Norm auf $W^{m,p}(\Omega)$ definiert.
Man beweise: Die Normen $\| \cdot \|_{m,p}$ und $| \cdot |_{m,p}$ sind äquivalent.

2. Einige Eigenschaften der Funktionen aus $W^{m,p}(\Omega)$

Kern des Differentialoperators $\sum\limits_{|\alpha|=m} D^\alpha$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Für $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

1° $\int\limits_\Omega u\varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$;

2° $u(x) = 0$ *für f. a.* $x \in \Omega$.

Wir formulieren eine analoge Aussage, bei der φ in 1° durch $D^\alpha \varphi$ ersetzt wird.

Sei $\mathcal{P}^n$ der Vektorraum aller Polynome in $\mathbb{R}^N$ des Grades $\le n$. Es gilt dann der

2.1 Satz *Seien* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *ein Gebiet,* $m \in \mathbb{N}$. *Für* $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

1° $\forall |\alpha| = m : \int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$;

2° $\exists\ P \in \mathcal{P}^{m-1}$, *so daß*

$$u(x) = P(x) \ \ f\ddot{u}r\ f.a.\ x \in \Omega.$$

■

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine meßbare Menge mit $0 < \lambda_N(\Omega) < +\infty$. Für $u \in L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$ bezeichne $u_\Omega \in \mathbb{R}$ den Mittelwert von u bez. Ω, d.h.

$$u_\Omega := \frac{1}{\lambda_N(\Omega)} \int\limits_\Omega u dx.$$

Es gilt

$$\int\limits_\Omega (u - u_\Omega) dx = 0, \qquad \|u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} = (\lambda_N(\Omega))^{-1+1/p} \Big| \int\limits_\Omega u dx \Big|.$$

Der folgende Satz liefert für $u \in W^{m,p}(\Omega)$ eine analoge Aussage für den Mittelwert von $D^\alpha u$ für Multi-Indizes α mit $1 \leq |\alpha| \leq m$.

2.3 Satz *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte offene Menge, und sei $1 \leq p < +\infty$. Dann gilt: Für jedes $u \in W^{m,p}(\Omega)$ existiert genau ein Polynom $P_u \in \mathcal{P}^m$, so daß*

$$\int\limits_\Omega D^\alpha (u - P_u) dx = 0 \quad \forall\ |\alpha| \leq m.$$

Für P_u gilt

$$\|P_u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq c(\lambda_N(\Omega))^{-1+1/p} \sum_{|\beta| \leq m} \Big| \int\limits_\Omega D^\beta u dx \Big|;$$

hierbei ist c eine Konstante, die nur von m, N, p und $\sup\limits_{y \in \Omega} \sup\limits_{|\alpha| < |\beta| \leq m} |D^\alpha y^\beta|$ abhängt. ∎

Leibnizsche Produktregel

2.4 Satz *Seien $p, q \in [1, +\infty]$ mit*

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 & & \textit{falls} \quad p, q \in [1, +\infty[, \\ p \in [1, +\infty[& \textit{beliebig} & \textit{falls} \quad q = +\infty, \\ q \in [1, +\infty[& \textit{beliebig} & \textit{falls} \quad p = +\infty, \\ p = q = +\infty. & & \end{array}$$

Definiere

$$r := \begin{cases} \frac{pq}{p+q} & \textit{falls} \quad p, q \in [1, +\infty[, \\ p & \textit{falls} \quad p \in [1, +\infty[,\ q = +\infty, \\ q & \textit{falls} \quad q \in [1, +\infty[,\ p = +\infty, \\ +\infty & \textit{falls} \quad p = q = +\infty. \end{cases}$$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Für $u \in W^{m,p}(\Omega)$ und $v \in W^{m,q}(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} D^\alpha(uv) &= \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta}(D^\beta u)D^{\alpha-\beta}v \quad \forall\ |\alpha| \le m, \\ \|uv\|_{W^{m,r}(\Omega)} &\le C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}\|v\|_{W^{m,q}(\Omega)}. \end{aligned}$$

■

Variablensubstitution für Funktionen aus $W^{m,p}(\Omega)$

2.5 Satz *Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Sei $\Phi : \Lambda \to \mathbb{R}^N$ eine bi-*LIPSCHITZ*-Abbildung. Definiere $\Omega := \Phi(\Lambda)$* [2)] *Für jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \le p < +\infty)$ gilt dann:*

$$u \circ \Phi \in W^{1,p}(\Lambda),$$
$$D_i(u\circ\Phi)(y) = \sum_{j=1}^N (D_j u)(\Phi(y))D_i\Phi_j(y) \ \mathit{für\ f.\ a.}\ y \in \Lambda,$$
$$c_1\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le \|u\circ\Phi\|_{W^{1,p}(\Lambda)} \le c_2\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

■

3. Die Räume $W_0^{m,p}(\Omega)$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen. Wir identifizieren $u \in C_c^\infty(\Omega)$ mit dem Element (= Äquivalenzklasse) aus $W^{m,p}(\Omega)$, das u als Repräsentant enthält. Im Sinne dieser Vereinbarung geben wir die folgende

3.1 Definition *Seien $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$.*

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \textit{Abschließung von } C_c^\infty(\Omega) \textit{ in } W^{m,p}(\Omega).$$

3.2 Satz *Seien $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty[$.*
1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge mit folgender Eigenschaft:*

$$(*) \qquad \exists\ a > 0,\ \exists\ i_0 \in \{1, \dots, N\} : |x_{i_0}| < a \quad \forall\ x \in \Omega.$$

Dann existiert eine Konstante $c = c(a, m, p)$, so daß

$$\sum_{|\alpha|\le m-1} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \le c \sum_{|\beta|=m} \int_\Omega |D^\beta u|^p dx \quad \forall\ u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

[2)] Da Φ insbesondere stetig und injektiv ist, ist die Menge Ω offen in $\mathbb{R}^N$.

2. $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

Die Bedingung $(*)$ bedeutet, daß Ω in Richtung der Koordinate x_{i_0} beschränkt ist.

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^N$ eine offene Menge, die der Bedingung (*) aus Satz 3.2/1. genügt. Aus der dort bewiesenen Ungleichung folgt:

$$u \mapsto \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} \qquad u \in W_0^{m,p}(\Omega)$$

ist eine Norm auf $W_0^{m,p}(\Omega)$, die zur Norm $\|\cdot\|_{m,p}$ äquivalent ist. ■

Aufgaben II.3

$\boxed{\text{A II.3.1}}$ Für $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ definiere

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für f. a.} \quad x \in \Omega, \\ 0 & \text{für f. a.} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Man beweise: $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

$\boxed{\text{A II.3.2}}$ Sei $u \in W^{m,p}(\Omega)$ mit: $\exists\, \eta > 0$, so daß

$$\Omega_\eta := \{x \in \Omega \mid \text{ dist } (x, \partial\Omega) < \eta\} \subset \Omega, \quad u(x) = 0 \text{ für f. a. } x \in \Omega_\eta.$$

Man beweise: $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

---

4. Der duale Raum von $W^{m,p}(\Omega)$ und $W_0^{m,p}(\Omega)$

5. Poincaré-Ungleichungen

6. Die Verkettung $f \circ u$ (f Lipschitz-stetig, $u \in W^{1,p}(\Omega)$)

Vorbereitungen

Wir beginnen mit dem

6.1 Lemma *Sei $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $r \in]0, +\infty[$ gilt*

1. $Du(x) = 0$ *für f. a.* $x \in u^{-1}(\{t\})$;

2. $$\left| \int\limits_{\{x \mid |u(x)-t|<r\}} (D_i u)\varphi dx \right| \leq r \int\limits_{\Omega} |D_i \varphi| dx \ \ \forall \, \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

$(i = 1, \ldots, N)$.

Mit Hilfe dieses Lemmas beweist man den folgenden

6.2 Satz *Sei $E \subset \mathbb{R}$ eine* Borel-*Menge mit $\lambda_1(E) = 0$. Dann gilt für jedes $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$*

$$Du(x) = 0 \ \text{ für f. a. } \ x \in u^{-1}(E).$$

■

Hauptresultat

Für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$A_f := \{t \in \mathbb{R} \mid f \ \textit{ ist nicht differenzierbar in } \ t\}.$$

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$, so ist A_f Borel-Menge [3)].
Es gilt nun der folgende

6.3 Satz *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$* Lipschitz-*stetig. Dann gilt:*

1. $\lambda_1(A_f) = 0$.
2. *Definiere*

$$g(t) := \begin{cases} f'(t) & \textit{für} \quad t \in \mathbb{R} \setminus A_f, \\ 0 & \textit{für} \quad t \in A_f. \end{cases}$$

Dann ist g Borel-*meßbar.*

3. *Sei $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ meßbar. Dann ist $g \circ u$ meßbar.*

Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist

6.4 Satz *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$* Lipschitz-*stetig mit der* Lipschitz-*Konstanten L. Sei A_f wie oben definiert. Sei $1 \leq p < +\infty$.*

1. *Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ definiere*

$$v_i(x) := \begin{cases} f'(u(x)) D_i u(x) & \textit{für f. a.} \quad x \in \Omega \setminus u^{-1}(A_f), \\ 0 & \textit{für f. a.} \quad x \in u^{-1}(A_f) \end{cases}$$

[3)] Dieses Resultat ist aus der Theorie der reellen Funktionen bekannt. - Hierbei ist $A_f = \mathbb{R}$ möglich. Die ersten Beispiele solcher Funktionen wurden von B. Bolzano und K. Weierstrass angegeben.

$(i = 1, \dots, N)$. *Dann gilt* $v_i \in L^p(\Omega)$ *und*

$$\int\limits_\Omega (f \circ u) D_i \varphi dx = -\int\limits_\Omega v_i \varphi dx \quad \forall\, \varphi \in c_c^\infty(\Omega).$$

Außerdem gilt

$$\|f \circ u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le \begin{cases} L\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} & \textit{falls} \quad f(0) = 0, \\ 2^{1/p'}\Big(|f(0)|(\lambda_N(\Omega))^{1/p} + L\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\Big) & \textit{falls} \quad \lambda_N(\Omega) < +\infty. \end{cases}$$

2. *Für* f *gelte überdies:*

$$A_f \textit{ ist abgeschlossen}, \ f \in C^1(\mathbb{R} \setminus A_f).$$

Dann gilt:

2.1 *Wenn* $u_k \to u$ *in* $W^{1,p}(\Omega)$, *so* $f \circ u_k \to f \circ u$ *in* $W^{1,p}(\Omega)$.

2.2 *Wenn* $f(0) = 0$, *so* $(f \circ u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *für alle* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Die Implikation „*wenn* $u_k \rightharpoonup u$ *in* $W^{1,p}(\Omega)$, *so* $f \circ u_k \rightharpoonup f \circ u$ *in* $W^{1,p}(\Omega)$" wird betrachtet in $\Rightarrow$ Ü.... ■

Anwendungen

1. Positiv- und Negativ-Teil von $u \in W^{1,p}(\Omega)$ Wir betrachten die Funktion

$$f(t) := t^+, \quad t \in \mathbb{R}\ ^{4)}.$$

Es gilt

$$|f(s) - f(t)| \le |s - t| \ \ \forall\, s, t \in \mathbb{R}, \ \ A_f = \{0\},$$

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r \quad t > 0, \\ 0 & f\ddot{u}r \quad t < 0. \end{cases}$$

Analoge Aussagen gelten für die Funktion $t \mapsto t^-$ $(t \in \mathbb{R})$.
Aus Satz 6.4 folgt:

6.5 Satz *Für* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \le p < +\infty)$ *gilt:*

$$u^+, u^-, |u| \in W^{1,p}(\Omega),$$

[4] $t^+ := \max\{t, 0\}$, $t^- := \max\{-t, 0\}$, $t \in \mathbb{R}$. Es gilt: $t = t^+ - t^-$, $|t| = t^+ + t^-$.

$$D_i u^+(x) = \begin{cases} D_i u(x) & f\ddot{u}r\ f.\ a.\ x\ \ mit\ \ u(x) > 0, \\ 0 & f\ddot{u}r\ f.\ a.\ x\ \ mit\ \ u(x) \le 0, \end{cases}$$

$$D_i u^-(x) = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\ f.\ a.\ x\ \ mit\ \ u(x) \le 0, \\ D_i u(x) & f\ddot{u}r\ f.\ a.\ x\ \ mit\ \ u(x) < 0, \end{cases}$$

$(i = 1, \dots, N)$, und

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u^+\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + \|u^-\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Wenn $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, so

$$u_k^+ \to u^+,\ \ u_k^- \to u^-,\ \ |u_k| \to |u|\ \ in\ \ W^{1,p}(\Omega).$$

Diese Aussagen gelten sinngemäß auch für $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Beachtet man, daß für $s, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \max\{s,t\} &= (s-t)^+ + t = \frac{1}{2}(s+t+|s-t|), \\ \min\{s,t\} &= (s-t)^- + t = \frac{1}{2}(s+t-|s-t|), \end{aligned}$$

so können analoge Aussagen wie die von Satz 6.5 für $\max\{u,v\}$ und $\min\{u,v\}$ $(u, v \in W^{1,p}(\Omega)(1 \le p < +\infty)$ formuliert werden $\Rightarrow$ Ü... ■

2. „Abschneiden“ von $u \in W^{1,p}(\Omega)$ bei λ und $-\lambda$.

Sei $\lambda > 0$. Für $t \in \mathbb{R}$ definiere

$$t^{(\lambda)} := \begin{cases} \lambda & \text{für} \quad t > \lambda \\ t & \text{für} \quad -\lambda \le t \le \lambda, \\ -\lambda & \text{für} \quad t < -\lambda \end{cases}$$

Andere Definitionen von $t^{(\lambda)}$ sind

$$\begin{aligned} t^{(\lambda)} &= \min\{\lambda, \max\{t, -\lambda\}\} \\ &= \min\{t^+, \lambda\} + \max\{t^-, -\lambda\}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$|s^{(\lambda)} - t^{(\lambda)}| \leq |s - t| \quad \forall\, s, t \in \mathbb{R}.$$

Aus Satz 6.4 erhält man

6.6 Satz *Für* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq q < +\infty)$ *und* $\lambda > 0$ *gilt*

$$u^{(\lambda)} \in W^{1,p}(\Omega),$$

$$D_i u^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} D_i u(x) & f\ddot{u}r\ f.\ a.\ mit \quad |u(x)| < \lambda, \\ 0 & f\ddot{u}r\ f.\ a.\ mit \quad |u(x)| \geq \lambda \end{cases}$$

$(i = 1, \ldots, N)$, *und*

$$u^{(\lambda)} \to u \ \ in\ W^{1,p}(\Omega)\, f\ddot{u}r \ \ \lambda \to \infty.$$

■

Bemerkungen zur Literatur 1. Satz 6.2 ist für den Spezialfall $E = \{t_0\}$ mit einer Approximationsmethode bewiesen in D. Kinderlehrer; G. Stampacchia: *An introduction to variational inequalities and their applications.* Academic Press, Boston 1980 [wieder aufgelegt: SIAM, Philadelphia 2000]. Unser Beweis von Satz 6.2 ist ähnlich dem in E. H. Lieb; M. Loss [1]. Ein sehr kurzer Beweis von Satz 6.2 mit Hilfe der Coarea-Formel findet sich in E. Giusti [1].

2. Unser Beweis von Satz 6.4 folgt einer Argumentation von E. Giusti [1]. Andere Beweise dieses Satzes finden sich in D. E. Edmunds; W. D. Evans [1] (für $1 < p < \infty$) und W. P. Ziemer [1] (für $(1 \leq p < \infty)$).

3. Satz 6.5 kann direkt (d.h. ohne Verwendung von Satz 6.4) durch eine elementare Approximationsmethode bewiesen werden (vgl. z. B. E. Giusti [1], E. H. Lieb; M. Loss [1], G. M. Troianiello [1] sowie D. Gilbarg; N. S. Trudinger: *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, Berlin 1977, 1983).

Weiterführende Resultate 1. Ein Analogon der Aussage von Satz 6.4 gilt nicht für $u \in W^{m,p}(\Omega)$ $(m \geq 2)$. Für $m = 2$ gilt jedoch folgender

Satz *Sei* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *mit* $\sup\limits_{0<t<+\infty} (|f'(t)| + t|f''(t)|) < +\infty$.
Sei $1 < p < \dfrac{N}{2}$. *Dann gilt* $f \circ u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ *für alle* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ *mit* $u \geq 0$ *f. ü. in* $\mathbb{R}^N$

(vgl. V. G. Maz'ja [ ], [; S. 363-365]).

B. Dahlberg [ ] bewies, daß das soeben notierte Resultat nicht für $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ mit $m \geq 3$ gilt. Die Eigenschaft „$f \circ u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ *für alle* $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$" schränkt die Klasse der Funktionen f sehr stark ein. Es gilt nämlich der

Satz *Sei* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. *Sei* $m \geq 2$, *und*

$$1 < p < \frac{N}{2} \ \ falls \ \ m = 2, \ \ 1 \leq p < \frac{N}{m} \ \ falls\ m \geq 3.$$

Es gelte $f \circ u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ *für alle* $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. *Dann existiert* $c = const$, *so daß* $f(t) = ct \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

(vgl. auch D. R. ADAMS/L. I. HEDBERG [; S. 62-63]).

2. Satz 6.6 bedeutet, daß jede Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p < +\infty)$ in der Norm dieses Raumes durch eine Folge aus $W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ approximiert werden kann ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ offen). Ein Analogon dieser Aussage gilt nicht für $W^{m,p}(\Omega)$ $(m \geq 2)$. Jedoch gilt eine „einseitige" Approximation:

Satz: *Für* $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \quad (m \in \mathbb{N}, 1 < p < +\infty)$ *existiert eine Folge* $(u_k) \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, *so daß:*
1. $\mathrm{supp}(u_k)$ *ist kompakt,*
2. $|u_k(x)| \leq |u(x)|$, $u_k(x)u(x) \geq 0$ *für f. a.* $x \in \mathbb{R}^N$,
3. $u_k \to u$ in $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ *für* $k \to \infty$

(vgl. ....).

7. Approximation von Funktionen aus $W^{m,p}(\Omega)$

Approximation durch Funktionen $\varphi|_{\bar{\Omega}}$ mit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (Ω sternförmig)

7.1 Definition *Eine beschränkte offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ heißt* **sternförmig bezüglich** $x_0 \in \Omega$, *wenn*

$$\forall\, x \in \bar{\Omega},\ \ \forall\, t \in\ [0,1] :\ \ (x_0 + t(x - x_0)) \in \bar{\Omega}.$$

Jede beschränkte offene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$, die sternförmig bez. eines ihrer Punkte ist, ist ein Gebiet.

Sei Ω sternförmig bez. $x_0 \in \Omega$. Wir definieren die „*Dehnung von Ω bez. x_0 um den Faktor* $\lambda \in\ ]0,1[$“:

$$\Omega_\lambda := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \exists\, y \in \Omega : x = x_0 + \frac{y - x_0}{\lambda} \right\}.$$

7.2 Lemma *Sei Ω sternförmig bez. $x_0 \in \Omega$. Dann gilt:*

1. $\bar{\Omega} \subset \Omega_\lambda$ *für alle* $\lambda \in]0,1[$.

2. Ω_λ *ist offen für alle* $\lambda \in]0,1[$.

3. $\Omega_{\lambda_1} \supset \Omega_{\lambda_2}$ *für alle* $\lambda_1, \lambda_2 \in]0,1[$ *mit* $\lambda_1 < \lambda_2$.

7.3 Bemerkung In der Literatur wird auch die folgende Eigenschaft einer beschränkten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ als Sternförmigkeit bez. eines Punktes $x_0 \in \Omega$ bezeichnet:

$$\forall\, x \in \Omega,\ \ \forall\, t \in [0,1] :\ (x_0 + t(x - x_0)) \in \Omega.$$

Diese Bedingung an eine beschränkte offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ist schwächer als die in Definition 7.1 formulierte. Dies erkennt man an dem folgenden Beispiel.

Wir geben zwei äquivalente Charakterisierungen der Sternförmigkeit einer beschränkten offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ bez. eines ihrer Punkte an.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte offene Menge, sei $x_0 \in \Omega$. Die folgenden Aussagen 1°, 2° und 3° sind äquivalent:

1° Ω *ist sternförmig bez.* $x_0 \in \Omega$.

2° *Für jedes $\xi \in S_1(0)$ existiert genau ein $\tau > 0$, so daß $(x_0 + \tau\xi) \in \partial\Omega$.*

3° *Es existiert eine stetige Funktion h: $S_1(0) \to]0,+\infty[$, so daß:*

1) $\Omega = \{x_0\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; 0 < |x - x_0| < h\left(\dfrac{x - x_0}{|x - x_0|}\right) \right\};$

2) $\partial\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; |x - x_0| = h\left(\frac{x - x_0}{|x - x_0|}\right) \right\}.$

Mit Hilfe der in Kap. I, Abschn. 2 benutzten Glättungsmethode beweist man das folgende Resultat.

7.4 Satz *Sei Ω sternförmig bez. $x_0 \in \Omega$. Sei $1 \le p < +\infty$. Dann gilt:*

$$\forall\, u \in W^{m,p}(\Omega),\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists\, \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \|u - \varphi_\varepsilon|_{\bar{\Omega}}\|_{m,p} \le \varepsilon.$$

■

Approximation durch Funktionen aus $C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$

7.5 Satz (Meyers/Serrin) *Seien $\Omega \in \mathbb{R}^N$ offen, und $1 \le p < +\infty$. Dann gilt:*

$$C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega) \text{ ist dicht in } W^{m,p}(\Omega).$$

■

8. Gebiete der Klasse $\mathcal{C}^{k,1}$.

Bezeichnungen:

$$x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N,\ x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}),$$

$$\Delta_\delta := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} \mid |x'|_\infty < \delta\},$$

$$Q_\delta := \Delta_\delta \times\ ]-\delta, \delta[.$$

8.1 Definition *Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ heißt* **Gebiet der Klasse $\mathcal{C}^{k,1}$** *($k = 0, 1, 2, \ldots$)* [Bezeichnung: $\Omega \in \mathcal{C}^{k,1}$], *wenn für jedes $x_0 \in \partial\Omega$ existieren*

1. $\delta > 0$,
2. *eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^N$ mit $x_0 \in U$,*
3. *eine Abbildung $\Phi : Q_\delta \to U$,*

so daß:

1) $k = 0$: Φ *ist bi-*LIPSCHITZ,

$k \geq 1$: Φ *ist bijektiv,*

$\Phi_i \in C^{k-1}(\bar{Q}_\delta), (\Phi^{-1})_i \in C^{k-1}(\bar{U})$, [5)]

$D^\alpha \Phi_i$ *und* $D^\alpha (\Phi^{-1})_i$ *sind* LIPSCHITZ-*stetig*

für alle Multi-Indizes $|\alpha| = k$ $(i = 1, \ldots, N)$,

2) $\Phi(\Delta_\delta \times]0, \delta[) = \Omega \cap U$.

Aus Definition 3.1 folgt:

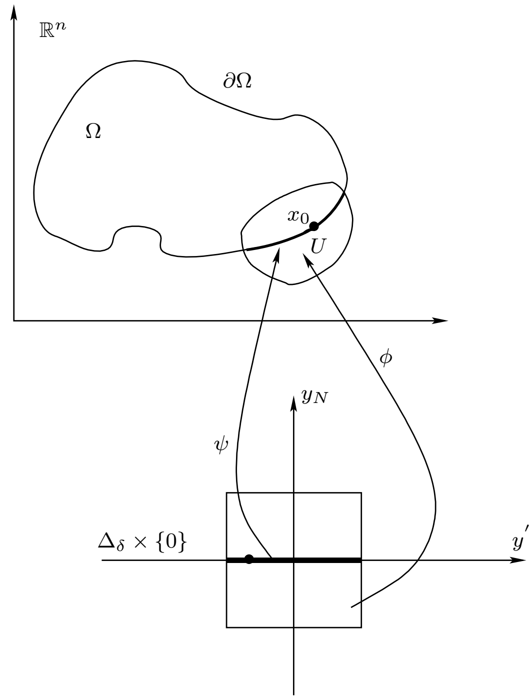
- $\Phi(\Delta_\delta \times \{0\}) = \partial\Omega \cap U,\ \Phi(\Delta_\delta \times] - \delta, 0[) = (\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}) \cap U$,
- *für* $\Psi(y') := \Phi(y', 0),\ y' \in \Delta_\delta$, *gilt:*

$$\text{Rang } \Psi'(y') = N - 1$$

für f. a. $y' \in \Delta_\delta$ *falls* $k = 0$,
für alle $y' \in \Delta_\delta$ *falls* ≥ 1.

Das Paar $\{\Delta_\delta, \Psi\}$ ist eine Parameterdarstellung von $\partial\Omega \cap U$ nahe $x_0 \in \partial\Omega$ bezüglich eines lokalen Koordinatensystems. Daher ist $\partial\Omega$ eine $(N-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse $\mathcal{C}^{k,1}$ von $\mathbb{R}^N$.

[2)] Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß U beschränkt ist, und daß $U = \text{Int}(\bar{U})$.



■

Sei $\Omega \in \mathcal{C}^{k,1}$. Der Rand $\partial\Omega$ kann mit endlich vielen der Umgebungen U, die in Definition 8.1 auftreten, überdeckt werden. Durch eventuelle Vergrößerung der Anzahl der U kann man erreichen, daß die in Definition 8.1 formulierten Eigenschaften mit ein und demselben $\delta > 0$ erfüllt sind. Wir fassen dies zusammen in dem folgenden

8.2 Satz *Sei $\Omega \in \mathcal{C}^{k,1}$. Dann existieren eine Zahl $\delta > 0$ und*

1. $x^{(\nu)} \in \partial\Omega$,
2. $U_\nu \subset \mathbb{R}^N$ *offen, beschränkt,* $x^{(\nu)} \in U_\nu$,
3. $\Phi_\nu : Q_\delta \to U_\nu$

$(\nu = 1, \ldots, s)$, *so daß:*

1) $k = 0$: Φ_ν *ist bi*-LIPSCHITZ,
   $k \geq 1$: Φ_ν *ist bijektiv,*
   $\Phi_{\nu i} \in C^{k-1}(\bar{Q}_\delta), (\Phi_\nu^{-1})_i \in C^{k-1}(\bar{U}_\nu)$,
   $D^\alpha \Phi_{i\nu}$ *und* $D^\alpha(\Phi_\nu^{-1})_i$ *sind* LIPSCHITZ-*stetig*
   für alle Multi-Indizes $|\alpha| = k$ $(i = 1, \ldots, N)$,

2) $\Phi_\nu(\Delta_\delta \times]0, \delta[) = \Omega \cap U$.

$(\nu = 1, \ldots, s)$.

Außerdem gilt

3) $\partial\Omega \subset \bigcup_{\nu=1}^{s} U_\nu$,

4) es existiert eine offene Teilmenge $U_0 \subset \mathbb{R}^N$, *so daß*

$$\bar{U}_0 \subset \Omega, \quad \bar{\Omega} \subset \bigcup_{\nu=0}^{s} U_\nu.$$

■

Die Beschreibung des Randes eines Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ als lokale Darstellung mittles Graphen von Funktionen von $N-1$ Veränderlichen ist für die Untersuchung von Randwerten von Sobolev-Raum-Funktion vorteilhafter. Für die Formulierung einer solchen Beschreibung führen wir zunächst folgende Bezeichnungen ein.

Sei $\{e_1, \ldots, e_N\}$ die kanonische Basis in $\mathbb{R}^N$. Das System $\{f_1, \ldots, f_N\}$ $(f_i \in \mathbb{R}^N)$ heißt Euklid*isches Koordinatensystem mit Ursprung in* $x_0 \in \mathbb{R}^N$ *und gleicher Orientierung wie* $\{e_1, \ldots, e_N\}$, wenn eine orthogonale Matrix A mit $\det A = 1$ existiert, so daß

1. $f_i = Ae_i \quad (i = 1, \ldots, N)$,

2. $\xi = \sum_{i=1}^{N} \xi_i f_i$ *für* $= (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ *gdw.* $\xi = x_0 + Ax$, $x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$.

8.3 Definition (Nečas) *Ein beschränktes Gebiet* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *heißt* **Gebiet der Klasse** $\mathcal{N}^0$ *bzw.* $\mathcal{N}^{k,1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ [Bezeichnung: $\Omega \in \mathcal{N}^0$ *bzw.* $\Omega \in \mathcal{N}^{k,1}$], *wenn für jedes* $x_0 \in \partial\Omega$ *existieren*

1. *ein* Euklid*isches Koordinatensystem* $\{f_1, \ldots, f_N\}$ *mit gleicher Orientierung wie* $\{e_1, \ldots, e_N\}$,

2. $\delta > 0$,

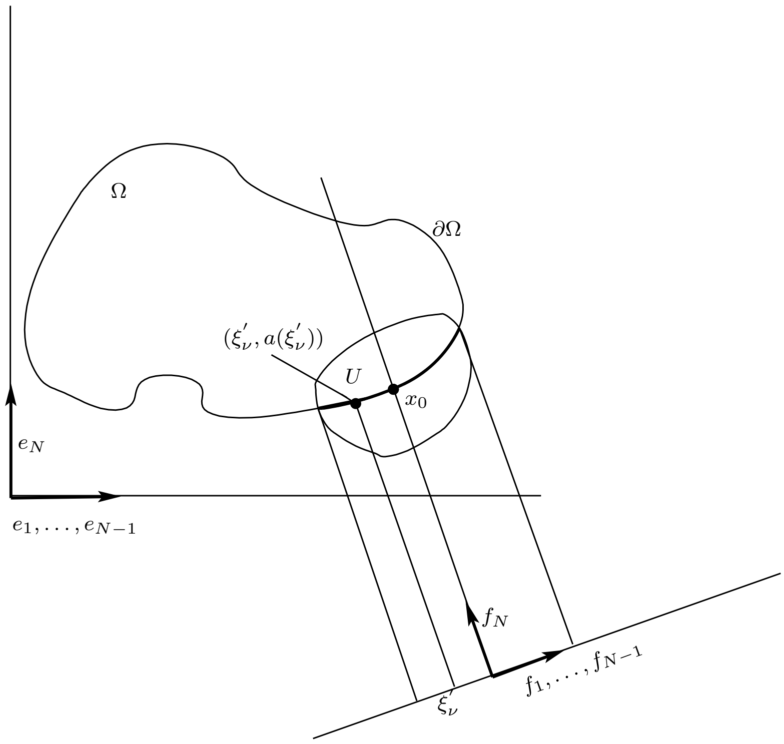
3. $a \in C(\bar{\Delta}_\delta)$ *bzw.* $a \in C^{k,1}(\bar{\Delta}_\delta)$,

so daß für $\xi \in span\{f_1, \ldots, f_N\}$ *gilt:*

1) $x_0 = (0, \ldots, 0, a(0))$,

2) $\{\xi \in \mathbb{R}^N \mid \xi' \in \Delta_\delta,\ a(\xi') < \xi_N < a(\xi') + \delta\} \subset \Omega$,

3) $\{\xi \in \mathbb{R}^N \mid \xi \in \Delta_\delta,\ \xi_N = a(\xi')\} \subset \partial\Omega$.



$\{\xi \in \mathbb{R}^N \,|\, \xi' \in \Delta_\delta,\, \xi_N = a(\xi')\} \subset \partial\Omega$

Ein Gebiet der Klasse $\mathcal{N}^{k,1}$ gehört auch zur Klasse $\mathcal{C}^{k,1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. In der Tat, wir definieren

$$\Phi(\xi) := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{N-1} \\ a(\xi') + \xi_N \end{pmatrix}, \quad \xi = (\xi', \xi_N) \in Q_\delta,$$

$$U := \Phi(Q_\delta).$$

Hierbei sind Q_δ und U im Koordinatensystem $\{f_1, \ldots, f_N\}$ ausgedrückt. Dann gilt:

- Φ ist bijektiv,
- Φ besitzt die gleichen Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften wie a,
- $\Phi(\Delta_\delta \times]0, \delta[) = \Omega \cap U$.

Für $\Psi(\xi') := \Phi(\xi', 0), \xi' \in \Delta_\delta$, erhält man:

$$\Psi'(\xi') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & & 1 \\ \dfrac{\partial a}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial a}{\partial \xi_2} & \dots & \dfrac{\partial a}{\partial \xi_{N-1}} \end{pmatrix}.$$

Also: Rang $\Psi'(\xi') = N - 1$ für f. a. $\xi' \in \Delta_\delta$ falls $k = 0$ bzw. für alle $x' \in \Delta_\delta$ falls $k \geq 1$.

Die Umkehrabbildung von Φ bez. des Koordinatensystems $\{f_1, \dots, f_N\}$ ist

$$\Phi^{-1}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ -a(y') + y_N \end{pmatrix}, \quad y \in U.$$

■

9. Fortsetzung von Funktionen aus $W^{m,p}(\Omega)$

Fortsetzung von Funktionen aus $W^{m,p}(Q^+)$ zu Funktionen aus $W^{m,p}(Q)$ ($Q =$ Würfel)

Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die folgende Matrix:

$$V_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -\dfrac{1}{2} & \cdots & -\dfrac{1}{k} \\ \Big(-1\Big)^2 & \Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^2 & \cdots & \Big(-\dfrac{1}{k}\Big)^2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \Big(-1\Big)^{k-1} & \Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{k-1} & \cdots & \Big(-\dfrac{1}{k}\Big)^{k-1} \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\det V_k = \Pi_{1\le i<j\le k}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{j}\right) > 0 \ ^{*)} \ .$$

Daher besitzt jedes System von k linearen algebraischen Gleichungen mit der Koeffizientenmatrix V_k genau eine Lösung.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\Delta := \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} \ \Big| \ |x'|_\infty < \delta\} \ ^{**)}$$

und

$$Q := \Delta \times]-\delta, \delta[,$$
$$Q^+ := \Delta \times]0, \delta[, \ Q^- := \Delta \times]-\delta, 0[.$$

Der folgende Satz liefert die Fortsetzung einer C^m-Funktion von $\overline{Q^+}$ auf $\bar{Q}$ unter Erhaltung der Differenzierbarkeitseigenschaften. Für die Konstruktion dieser Fortsetzung wird die Lösung $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1})$ des Systems

$$V_{m+1}\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

benutzt.

9.1 Satz (C^m-Spiegelung) *Sei $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1})$ die eindeutig bestimmte Lösung des Systems* (9.1), *d. h.*

$$\sum_{j=1}^{m+1}\Big(-\frac{1}{j}\Big)^l \lambda_j = 1 \quad (l = 0, 1, \ldots, m).$$

Für $u \in C^m(\bar{Q}^+)$ definiere

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \textit{für} \quad x \in \overline{Q^+}, \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} \lambda_j u\Big(x', -\dfrac{x_N}{j}\Big) & \textit{für} \quad x \in \overline{Q^-} \setminus (\bar{\Delta} \times \{0\}). \end{cases}$$

---

*) $\det V_k$ ist eine VANDERMONDEsche Determinante.

**) $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N, x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$; $|x'|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_{N-1}|\}$.

Dann gilt:

1. $\tilde{u} \in C^m(\bar{Q})$;
2. *für jedes* $p \in [1, +\infty[$ *existiert eine Konstante* $c_0 = c_0(m, p)$*, so daß*

$$\|\tilde{u}\|_{W^{m,p}(Q)} \leq c_0 \|u\|_{W^{m,p}(Q^+)}.$$

■

9.2 Bemerkungen 1. Die Konstruktion der Fortsetzung $\tilde{u} \in C^m(\bar{Q})$ für $u \in C^m(\overline{Q^+})$ wurde aus Triebel [; S. 377] entnommen. Aus der Konstruktion von $\tilde{u}$ folgt unmittelbar die Linearität der Abbildung $u \mapsto \tilde{u}$.
2. Sei $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Systems

$$\sum_{j=1}^{m} \Big(-\frac{1}{j} \Big)^l \sigma_j = 1 \quad (l = 0, 1, \ldots, m-1)$$

(d.h. im Unterschied zu (9.1) wird hier die Koeffizientenmatrix V_m benutzt). Für $u \in C^m(\overline{Q^+})$ definiere

$$\hat{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \textit{für} \quad x \in \overline{Q^+}, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \sigma_j u\Big(x', -\dfrac{x_N}{j}\Big) & \textit{für} \quad x \in \overline{Q^-} \setminus (\bar{\Delta} \times \{0\}). \end{cases}$$

Diese Fortsetzung wird häufig in der Literatur benutzt, z. B. Babič [ ], Nečas [; S. 76], Troianiello [; S. 52-53]. Für die Fortsetzung $\hat{u}$ erhält man:

$$\begin{aligned} &\hat{u} \in C^{m-1}(\bar{Q}), \\ &D^\alpha \hat{u} \in C(\bar{Q}) \quad \text{für alle} \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1}, 0) \quad \text{mit} \quad |\alpha| = m; \end{aligned}$$

außerdem gilt

$$\frac{\partial^m \hat{u}}{\partial x_N^m}\bigg|_{\overline{Q^-}} \in C(\overline{Q^-}),$$

jedoch kann die Funktion $\dfrac{\partial^m \hat{u}}{\partial x_N^m}$ einen Sprung längs $\Delta \times \{0\}$ besitzen. Dennoch kann man zeigen, daß diese Funktion die schwache Ableitung von $\hat{u}$ in Q bez. $\alpha = (0, \ldots, 0, m)$ ist, und daß die Abbildung $u \mapsto \hat{u}$ stetig von $W^{m,p}(Q^+)$ in $W^{m,p}(Q)$ ist ($1 \leq p < +\infty$ beliebig).

Wir illustrieren den Unterschied zwischen den Fortsetzungen $\tilde{u}$ und $\hat{u}$ für $m = 1$ an einem Beispiel. ■

Aus den Sätzen 7.4 und 9.1 folgt

9.3 Satz *Sei* $1 \le p < +\infty$. *Für jedes* $u \in W^{m,p}(Q^+)$ *existiert* $\tilde{u} \in W^{m,p}(Q)$, *so daß*

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u \quad f.\,ü.\ auf \quad Q^+, \\ \|\tilde{u}\|_{W^{m,p}(Q)} &\le c_0\|u\|_{W^{m,p}(Q^+)} \quad (c_0 \text{ gemäß Satz 9.1/2}). \end{aligned}$$

Fortsetzung von Funktionen aus $W^{m,p}(\Omega)$ zu Funktionen aus $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ ($\Omega \in C^{m-1,1}$)

Sei $\Omega \in \mathcal{C}^{m-1,1}$ ($m \in \mathbb{N}$). Sei $x_0 \in \partial\Omega$, und seien $\delta > 0$, $U \subset \mathbb{R}^N$ und $\Phi : Q_\delta \to U$ wie in Definition 7.1. Hier stellt $\{\Delta_\delta, \Phi(\cdot, 0)\}$ eine Parameterdarstellung für $\partial\Omega \cap U$ bez. eines lokalen Koordinatensystems dar. Dieses lokale Koordinatensystem geht aus dem kanonischen Koordinatensystem, welches durch $\{e_1, \dots, e_N\}$ definiert wird, durch eine affine Abbildung hervor. Auf die Notierung dieser Abbildung verzichten wir, wenn $x \in \bar{\Omega} \cap U$ (bez. $\{e_1, \dots, e_N\}$) durch $y \in \Delta_\delta \times [0, \delta[$ mittels $x = \Phi(y)$ ausgedrückt wird.

Aus Satz 2.5 folgt nun

9.4 Satz *Sei* $1 \le p < +\infty$.

1. *Sei* $u \in W^{m,p}(\Omega \cap U)$. *Definiere*

$$v(y) := u(\Phi(y)) \quad \text{für f. a.} \quad y \in \Delta_\delta \times]0, \delta[.$$

Dann gilt

$$v \in W^{m,p}(\Delta_\delta \times]0, \delta[), \ \|v\|_{W^{m,p}(\Delta_\delta \times]0,\delta[)} \le c\|u\|_{W^{m,p}(\Omega \cap U)}.$$

2. *Sei* $\tilde{v} \in W^{m,p}(Q_\delta)$. *Definiere*

$$\tilde{u}(x) := \tilde{v}(\Phi^{-1}(x)) \quad \text{für f. a.} \quad x \in U.$$

Dann gilt

$$\tilde{u} \in W^{m,p}(U), \quad \|\tilde{u}\|_{W^{m,p}(U)} \le c\|\tilde{v}\|_{W^{m,p}(Q_\delta)}.$$

■

9.5 Satz (Fortsetzung) *Seien* $\Omega \in \mathcal{C}^{m-1,1}$, $1 \le p < +\infty$. *Dann existieren eine beschränkte offene Menge* $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ *mit* $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$ *und eine Konstante* $\tilde{c} > 0$, *so daß:*

für jedes $u \in W^{m,p}(\Omega)$ *existiert* $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *mit:*

$$\tilde{u} = u \text{ f. ü. in } \Omega, \quad \tilde{u} = 0 \text{ f. ü. in } \mathbb{R}^N \setminus \tilde{\Omega}, \quad \|\tilde{u}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \le \tilde{c}\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Beweisskizze Seien $U_0, U_1, \ldots, U_s$ und $\Phi_\nu : Q_\delta \to U_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ wie in Satz 9.4.

1. Schritt Setze $Q_\delta^+ := \Delta_\delta \times]0, \delta[$. Definiere

$$v_\nu(y) := u(\Phi_\nu(y)) \quad \text{für f. a.} \quad y \in Q_\delta^+.$$

Satz 9.4/1. liefert

$$v_\nu \in W^{m,p}(Q_\delta^+), \ \|v_\nu\|_{W^{m,p}(Q_\delta^+)} \le c_\nu \|u\|_{W^{m,p}(\Omega \cap U_\nu)}.$$

2. Schritt Die Funktion v_ν kann von Q_δ^+ auf $\Delta_\delta \times]-\delta, 0[$ fortgesetzt werden: es existiert $\tilde{v}_\nu \in W^{m,p}(Q_\delta)$, so daß

$$\tilde{v}_\nu = v_\nu \quad \text{f. ü. in} \quad Q_\delta^+, \ \|\tilde{v}\|_{W^{m,p}(Q_\delta)} \le \hat{c}\|v_\nu\|_{W^{m,p}(Q_\delta^+)}$$

(vgl. Satz 9.3). Es folgt

$$\tilde{v}_\nu(\Phi_\nu^{-1}(x)) = v_\nu(\Phi_\nu^{-1}(x)) = u(x) \quad \text{für f. a.} \quad x \in \Omega \cap U_\nu,$$

$$\|\tilde{v}_\nu\|_{W^{m,p}(Q_\delta)} \le \hat{c}c_\nu \|u\|_{W^{m,p}(\Omega \cap U_\nu)}.$$

3. Schritt Sei $\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_s\}$ eine Zerlegung der Eins, die $U_0, U_1, \ldots, U_s$ zugeordnet ist:

$$\zeta_\nu \in C_c^\infty(U_\nu), \quad \sum_{\nu=0}^{s} \zeta_\nu(x) = 1 \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}.$$

Definiere

$$\tilde{u}_0(x) := \begin{cases} u(x)\zeta_0(x) & \text{für f. a.} \quad x \in U_0, \\ 0 & \text{für f. a.} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus U_0, \end{cases}$$

$$\tilde{u}_\nu(x) := \begin{cases} \tilde{v}_\nu(\Phi_\nu^{-1}(x))\zeta_\nu(x) & \text{für f. a.} \quad x \in U_\nu, \\ 0 & \text{für f. a.} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus U_\nu, \end{cases}$$

$(\nu = 1, \ldots, s)$. Es gilt $\tilde{u}_\nu \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ sowie $\tilde{u}_\nu(x) = 0$ für f. a. $x \in \mathbb{R}^N \setminus \tilde{\Omega}$, wobei $\tilde{\Omega} := \bigcup_{\nu=0}^{s} U_\nu$. Für $x \in \Omega \cap U_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ gilt $\Phi_\nu^{-1}(x) \in Q_\delta^+$ und damit

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\nu(x) &= \tilde{v}_\nu(\Phi_\nu^{-1}(x))\zeta_\nu(x) \\ &= v_\nu(\Phi_\nu^{-1}(x))\zeta_\nu(x) \\ &= u(x)\zeta_\nu(x). \end{aligned}$$

Die Funktion

$$\tilde{u}(x) := \sum_{\nu=0}^{s} \tilde{u}_\nu(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

leistet das Verlangte. ■

Kapitel III. Einbettungssätze

1. Abschätzungen in $\mathbb{R}^N$

Abschätzung von $\|u\|_{L^{pN/(N-p)}(\mathbb{R}^N)}$ **für** $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p < N)$

1.1 Satz *Sei* $1 \le p < N$. *Dann gilt für alle* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{pN/(N-p)} dx \Big)^{(N-p)/pN} \le \frac{p(N-1)}{N(N-p)} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\sum_{i=1}^N |D_i u| \Big)^p dx \Big)^{1/p}.$$

Beweisskizze $\boxed{p = 1}$ Für $u \in C_c^1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{N/(N-1)} dx \le \Big(\prod_{i=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^N} |D_i u| dx \Big)^{1/(N-1)} \qquad \text{(E. Gagliardo)}.$$

Hieraus folgt

$$\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{N/(N-1)} dx \Big)^{(N-1)/N} \le \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^N} |D_i u| dx.$$

Für $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ erhält man die Behauptung des Satzes mittels Approximation von u in $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ durch eine Folge von Funktionen aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (vgl. Kap. II, Satz 3.2/2.).

$\boxed{1 < p < N}$ Definiere $s := \dfrac{N(p-1)}{N-p}$ und $f(t) := |t|^{1+s},\ t \in R$. Es gilt $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Für $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ definiere $U := f(u)$. Dann ist $U \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. Damit folgt die Behauptung des Satzes für $1 < p < N$ aus der für $p = 1$. ■

Für $1 \le p < N$ definieren wir p^* durch

$$\frac{1}{p^*} := \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Die Zahl p^* heißt **Sobolevscher Einbettungsexponent**. ■

Abschätzung von $\sup\limits_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^N \\ x \ne y}} \dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{1-N/p}}$ **für** $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ $(N < p < +\infty)$

1.2 Satz *Sei* $N < p < +\infty$ *Dann gilt für alle* $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$

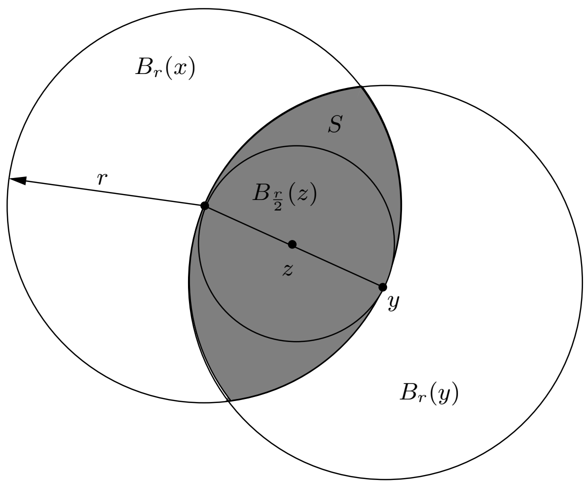
$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^N \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-N/p}} \leq c_0\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |Du(\xi)|^p d\xi\Big)^{1/p},$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x)| \leq c_0(\operatorname{diam}(\operatorname{supp}(u)))^{1-N/p}\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |Du(\xi)|^p d\xi\Big)^{1/p},$$

wobei

$$c_0 := \frac{2^{N+1}}{\Big(1-\dfrac{N}{p}\Big)\Big(\lambda_N(B_1)\Big)^{1/p}},$$

Beweisskizze Definiere $r := |x-y|$, $z := \dfrac{x+y}{2}$ und $S := B_r(x) \cap B_r(y)$.



Wegen $B_{r/2}(z) \subset S$ und $\lambda_N(S) \geq \lambda_N(B_{r/2}(z)) = \lambda_N(B_1)\Big(\dfrac{r}{2}\Big)^N$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda_N(B_1)\Big(\frac{r}{2}\Big)^N \mid u(x)-u(y)| &\leq \int_S |u(x)-u(y)|d\xi \\ (+) \qquad &\leq \int_{B_r(x)} |u(x)-u(\xi) \mid d\xi + \int_{B_r(y)} |u(\xi)-u(y)|d\xi. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\int_{B_r(x)} |u(x)-u(\xi) \mid d\xi \leq r\int_0^1 \Big(\int_{B_r(x)} |Du(x+t(\xi-x)) \mid d\xi\Big)dt$$

$$= \quad r\int_0^1 \Bigl(\frac{1}{t^N}\int_{B_{rt}(x)} |Du(\xi)\mid d\xi\Bigr)dt$$

$$\leq \quad \frac{(\lambda_N(B_1))^{1-1/p}}{1-\dfrac{N}{p}} r^{1+N(1-1/p)}\Bigl(\int_{B_r(x)} |Du(\xi)|^p d\xi\Bigr)^{N/p}.$$

In analoger Weise wird das zweite Integral auf der rechten Seite der Ungleichung (+) abgeschätzt. Beachtet man, daß $B_r(x) \subset B_{3r/2}(z)$ und $B_r(y) \subset B_{3r/2}(z)$, so folgt

$$|u(x) - u(y)| \leq c_0 r^{1-N/p}\Bigl(\int_{B_{3r/2}(z)} |Du(\xi)|^p d\xi\Bigr)^{1/p}.$$

Zum Beweis der zweiten Behauptung des Satzes setzen wir $K_u := \mathrm{supp}(u)$. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ mit

$$0 < \mathrm{dist}(x_\varepsilon, K_u) \leq \varepsilon.$$

Nun existiert $y_\varepsilon \in K$, so daß $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| = \mathrm{dist}(x_\varepsilon, K_u)$. Damit erhält man für alle $x \in K_u$

$$|x - x_\varepsilon| \leq \varepsilon + \mathrm{diam}(K_u).$$

Wegen $x_\varepsilon \notin K_u$ folgt nun

$$|u(x)| = |u(x) - u(x_\varepsilon)| \leq c_0\Bigl(\varepsilon + \mathrm{diam}(K_u)\Bigr)^{1-N/p}\Bigl(\int_{\mathbb{R}^N} |Du(\xi)|^p d\xi\Bigr)^{1/p}.$$

■

2. Stetige Einbettungen von $W_0^{m,p}(\Omega)$

Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ mit $\lambda_N(\mathbb{R}^N \setminus \Omega) > 0$. Sei $1 \leq p < N$. Wir setzen $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ durch Null auf $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ fort:

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{für f. a. } x \in \Omega, \\ 0 & \text{für f. a. } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad (D_i\tilde{u})(x) = 0 \quad \text{für f. a.} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \quad (i = 1, \ldots, N)$$

(vgl. **Übung** II.3.1). Anwendung von Satz 1.1 auf $\tilde{u}$ ergibt

$$
\begin{aligned}
\Big(\int\limits_{\Omega} |u|^{pN/(N-p)} dx\Big)^{(N-p)/pN} &= \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}|^{pN/(N-p)} dx\Big)^{(N-p)/pN} \\
&\le \frac{p(N-1)}{N(N-p)}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big(\sum_{i=1}^{N} |D_i\tilde{u}|^p dx\Big)^{1/p} \\
&= \frac{p(N-1)}{N(N-p)}\Big(\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{N} |D_i u|\Big)^p dx\Big)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Diese Überlegung kann induktiv in analoger Weise für Funktionen aus $W_0^{m,p}(\Omega)$ durchgeführt werden.
Integralabschätzungen für den Fall $p = N$ können auf den Fall eines Integrierbarkeitsexponenten kleiner als N zurückgeführt werden.
Damit erhält man die folgenden beiden Einbettungssätze.

2.1 Satz *Es gelte*

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *offen,*
- $1 \le p < \dfrac{N}{m}$.

Dann existiert eine Konstante $c_1 = c_1(m, N, p)$, *so daß für alle* $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ *gilt:*

$$
u \in L^{pN/(N-mp)}(\Omega), \Big(\int\limits_{\Omega} |u|^{pN/(N-mp)} dx\Big)^{N-mp)/pN} \le c_1\Big(\sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx\Big)^{1/p}.
$$

2.2 Satz (*Grenzfall* $p = \dfrac{N}{m}$) *Es gelte*

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *offen,* $\lambda_N(\Omega) < +\infty$,
- $m \le N$.

Dann existiert eine Konstante $c_2 = c_2(m, N)$, *so daß für alle* $u \in W_0^{m,N/m}(\Omega)$ *und alle* $q \in [1, +\infty[$ *gilt:*

$$
\begin{cases}
u \in L^q(\Omega), \\
\Big(\int\limits_{\Omega} |u|^q dx\Big)^{1/q} \le c_2 q (\lambda_N(\Omega))^{1/q}\Big(\sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha u|^{N/m}\Big)^{m/N}.
\end{cases}
$$

$\blacksquare$

Sei Ω eine beschränkte offene Teilmenge von $\mathbb{R}^N$. Sei $N < p < +\infty$. Für $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ existiert eine Folge $(\varphi_k) \subset C_c^\infty(\Omega)$, so daß $\varphi_k \to u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Wir setzen φ_k durch Null auf $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ fort und erhalten so eine Funktion aus $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, deren Träger in Ω enthalten ist. Die zweite der in Satz 1.2 formulierten Ungleichungen ergibt nun

$$\|\varphi_k - \varphi_l\|_{C(\bar{\Omega})} \le c_0 (\operatorname{diam}(\Omega))^{1-N/p} \left(\int\limits_\Omega |D(\varphi_k - \varphi_l)|^p d\xi \right)^{1/p} \quad (k, l \in \mathbb{N}).$$

Also ist (φ_k) Cauchy-Folge in $C(\bar{\Omega})$. Daher existiert ein $u^* \in C(\bar{\Omega})$, so daß $\varphi_k \to u^*$ in $C(\bar{\Omega})$. Offensichtlich gilt $u^*(x) = u(x)$ für f. a. $x \in \Omega$.

Die in Satz 1.2 formulierten Ungleichungen liefern

$$\|u^*\|_{C(\bar{\Omega})} + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u^*(x) - u^*(y)|}{|x-y|^{1-N/p}} \le c_0 \Big(1 + (\operatorname{diam}(\Omega))^{1-N/p} \Big) \left(\int\limits_\Omega |Du|^p dx \right)^{1/p}.$$

Das soeben bewiesene Resultat kann auf Funktionen aus $W_0^{m,p}(\Omega)$ erweitert werden. Das ergibt

2.3 Satz *Es gelte*

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *beschränkt und offen,*
- $p \ge 1, \;\; \dfrac{N}{m} < p < +\infty.$

Sei

$$\begin{aligned}
&\mu := m - \frac{N}{p} && \textit{falls} \;\; m - \frac{N}{p} < 1, \\
&\mu \in \,]0,1[\;\textit{beliebig} && \textit{falls} \;\; m - \frac{N}{p} = 1, \\
&\mu := 1 && \textit{falls} \;\; m - \frac{N}{p} > 1.
\end{aligned}$$

Dann existiert eine Konstante c_3, wobei

$$\begin{aligned}
c_3 &= c_3(m, N, p, \Omega) \quad \textit{falls} \quad m - \frac{N}{p} < 1 \quad \textit{oder} \quad m - \frac{N}{p} > 1, \\
c_3 &= (m, N, \mu, \Omega) \quad \textit{falls} \quad m - \frac{N}{p} = 1,
\end{aligned}$$

so daß für jedes $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ein Repräsentant $u^* \in u$ existiert, für den gilt:

$$u^* \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega}),\ \|u^*\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})} \le c_3 \Big(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \Big)^{1/p}.$$

■

3. Stetige Einbettungen von $W^{m,p}(\Omega)$

3.1 Satz *Sei $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$.*

1. *Sei $1 \le p < \frac{N}{m}$. Dann existiert eine Konstante $c_1 = c_1(m,N,p,\Omega)$, so daß für alle $u \in W^{m,p}(\Omega)$ gilt:*

$$u \in L^{pN/(N-mp)}(\Omega), \quad \|u\|_{L^{pN/(N-mp)}(\Omega)} \le c_1 \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

2. *Sei $m \le N$. Dann existiert für jedes $q \in [1,+\infty[$ eine Konstante $c_2 = c_2(m,n,q,\Omega)$, so daß für alle $u \in W^{m,N/m}(\Omega)$ gilt:*

$$u \in L^q(\Omega), \quad \|u\|_{L^q(\Omega)} \le c_2 \|u\|_{W^{m,N/m}(\Omega)}.$$

3. *Seien $p \ge 1$, $p > \frac{N}{m}$ und*

$$\begin{aligned} &\mu := m - \frac{N}{p} && \textit{falls} \quad m - \frac{N}{p} < 1, \\ &\mu \in\,]0,1[\textit{ beliebig} && \textit{falls} \quad m - \frac{N}{p} = 1, \\ &\mu := 1 && \textit{falls} \quad m - \frac{N}{p} > 1. \end{aligned}$$

Dann existiert eine Konstante c_3, wobei

$$\begin{aligned} c_3 &= c_3(m,N,p,\Omega) \quad \textit{falls} \quad m - \frac{N}{p} < 1 \quad \textit{oder} \quad m - \frac{N}{p} > 1, \\ c_3 &= (m,N,\mu,\Omega) \quad \textit{falls} \quad m - \frac{N}{p} = 1, \end{aligned}$$

so daß für jedes $u \in W^{m,p}(\Omega)$ ein Repräsentant $u^* \in u$ existiert, für den gilt:

$$u^* \in C^{0,\mu}(\bar{\Omega}), \quad \|u^*\|_{C^{0,\mu}(\bar{\Omega})} \le c_3 \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

∎

4. Kompakte Einbettungen

Kompakte Einbettungen von $W_0^{m,p}(\Omega)$

4.1 Satz *Es gelte:*

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *offen,* $\lambda_N(\Omega) < +\infty$,
- $1 \le p \le \dfrac{N}{m}$.

Für jedes q *mit*

$$\begin{aligned} &1 \le q < \frac{pN}{N-mp} && \textit{falls} \quad mp < N, \\ &1 \le q < +\infty && \textit{falls} \quad mp = N \end{aligned}$$

gilt:

Jede beschränkte Teilmenge von $W_0^{m,p}(\Omega)$ *ist präkompakt in* $L^q(\Omega)$.

4.2 Satz *Es gelte:*

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *beschränkt, offen,*
- $p \ge 1, \dfrac{N}{m} < p < +\infty$.

Für jedes μ *mit*

$$\begin{aligned} 0 \le \mu < m - \frac{N}{p} \quad &\textit{falls} \quad m - \frac{N}{p} < 1, \\ 0 \le \mu < 1 \quad &\textit{falls} \quad m - \frac{N}{p} \ge 1 \end{aligned}$$

gilt:

Jede beschränkte Teilmenge von $W_0^{m,p}(\Omega)$ *ist präkompakt in* $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$.

Kompakte Einbettungen von $W^{m,p}(\Omega)$

4.3 Satz *Es gelte:*

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *offen*, $\lambda_N(\Omega) < +\infty$,
- $1 \leq q < p$.

Dann ist jede beschränkte Teilmenge von $W^{m,p}(\Omega)$ *präkompakt in* $W^{m-1,q}(\Omega)$.

4.4 Satz *Sei* $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$. *Dann gelten die Behauptungen der Sätze 4.1 und 4.2 für beschränkte Teilmengen von* $W^{m,p}(\Omega)$ *anstelle von* $W_0^{m,p}(\Omega)$. ■

Kapitel IV. Randwerte von Funktionen aus $W^{m,p}(\Omega)$

3. Randwert von $W^{1,p}(\Omega)$

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet der Klasse $\mathcal{C}^{0,1}$.

3.1 Satz *Seien* $1 \leq p \leq N$ *und*

$$q = \frac{p(N-1)}{N-p} \quad \textit{für} \quad 1 \leq p < N, \quad q \in [1, +\infty[\quad \textit{für} \quad p = N.$$

Dann existiert eine Abbildung $\gamma \in \mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), L^q(\partial\Omega))$, *so daß*

$$(*) \qquad \gamma(u) = u|_{\partial\Omega} \quad \forall \;\; u \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Wegen $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ ist $\partial\Omega$ eine Menge mit $\lambda_N(\partial\Omega) = 0$. Die Abbildung

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega)$$

ordnet jedem Element $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (= Äquivalenzklasse bez. λ_N) ein Element $\gamma(u) \in L^q(\partial\Omega)$ (= Äquivalenzklasse bez. des auf $\partial\Omega$ definierten Oberflächenmaßes) zu. Identifiziert man $u \in C^1(\bar{\Omega})$ mit einem Element aus $W^{1,p}(\bar{\Omega})$, so bedeutet $(*)$, daß $u|_{\partial\Omega}$ Repräsentant der Äquivalenzklasse $\gamma(u)$ ist.

3.2 Bemerkungen 1. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1 gilt für jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$\gamma(u^+) = (\gamma(u))^+, \quad \gamma(u^-) = (\gamma(u))^- \quad \text{f. ü. auf} \quad \partial\Omega.$$

2. Sei $p > N$. Dann existiert für jedes $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ein Repräsentant $u^* \in u$, der zu $C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ gehört (vgl. Kap. III, Satz 3.1/3.). Die Funktion $u^*|_{\partial\Omega}$ ist Repräsentant von $\gamma(u)$. ■

3.3 Satz *Für jedes* $p \in [1, +\infty[$ *gilt:*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \;\Big|\; \gamma(u) = 0 \quad f.\ ü.\ auf \quad \partial\Omega\}$$ [6].

3.4 Satz (*äquivalente Normierung von* $W_0^{1,p}(\Omega)$) *Sei* $1 \leq p < +\infty$, *und sei* $\Gamma \subseteq \Omega$ *mit* $\text{mes}(\Gamma) > 0$.

Dann existiert eine Konstante c_0, *so daß*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c_0 \Big\{ \Big(\int_\Omega |Du|^p dx \Big)^{1/p} + \Big| \int_\Gamma \gamma(u) ds \Big| \Big\}$$

für alle $w \in W^{1,p}(\Omega)$. ■

[6] In Kap. II, Absch. 3 wird $W_0^{1,p}(\Omega)$ für offene Mengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ eingeführt.

Literaturverzeichnis

ADAMS, D. A.; HEDBERG, L. I.
[1] *Function spaces and potential theory.* Springer-Verlag, Berlin 1996.

ADAMS, R. A.
[1] *Sobolev spaces.* Academic Press, Boston, 1978,

ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J.
[1] *Sobolev spaces.* 2^{nd} ed. Elsevier Science, Academic Press, Amsterdam, Boston 2003.

ALT, H. W.
[1] *Lineare Funktionalanlysis.* Springer-Verlag, Berlin 1985, 1992, 1999, 2002.

Brezis, H.
[1] *Analyse fonctionelle. Théorie et applications.* Masson, Paris 1993.

Burenkov, V. I.
[1] *Sobolev spaces on domains.* B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig 1998.

Di Benedetto, E.
[1] *Real analysis*. Birkhäuser, Boston 2002.

Giusti, E.
[1] *Metodi diretti nell calcolo delle variazioni*. Unione Mat. Ital., Bologna 1994.

Kufner, A.; John, O.; Fucik, S.
[1] *Function spaces.* Academia, Prague 1977.

LIEB, E. H.; LOSS, M.
[1] *Analysis*. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1997.

Maz'ja, V. G.
[1] *Sobolev spaces*. Springer-Verlag, Berlin 1985.

TROIANIELLO, G. M.
[1] *Elliptic differential equations and obstacle problems.* Plenum Press, New York, London 1987.

Ziemer, W. P.
[1] *Weakly differentiable functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation.* Springer-Verlag, New York 1998.