Skript zur Vorlesung
Analysis II

Prof. Dr. J. Naumann

Sommersemester 2002

21. Juli 2003

Kapitel 1: RIEMANN-*Integral*

1.1 Definition und Eigenschaften des RIEMANN-Integrals

1.2 Uneigentliche Integrale

1.3 Kurven in $\mathbb{R}^n$. Kurvenintegral

1.4 FOURIER-Reihen

Kapitel 2: *Differenzierbare Abbildungen*

2.1 Normierte Vektorräume. Lineare Operatoren

2.2 Ableitung. Ableitungen höherer Ordnung

Kapitel 3: *Differenzierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher* (I)

3.1 Differenzierbarkeit. Partielle Differenzierbarkeit

3.2 Partielle Ableitungen zweiter Ordnung. Satz von SCHWARZ

3.3 TAYLOR-Formel

3.4 Lokale Extrema

3.5 Potentialfelder

Kapitel 4: *Differenzierbare Funktionen mehrerer Veränderlicher* (II)

4.1 Vorbemerkungen. Beispiele

4.2 Implizite Funktionen. Differenzierbarkeit der inversen Abbildung

4.3 Spezialfall $X = \mathbb{R}^p$, $Y = Z = \mathbb{R}^q$. Beispiele

4.4 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

4.5 Extrema unter Nebenbedingungen

C. Guhlke hat den Text kritisch durchgesehen und zahlreiche Verbesserungen angeregt. Die Zeichnungen wurden von B. Schümann angefertigt. Beiden sei an dieser Stelle gedankt.

Kapitel 1. RIEMANN-Integral

Der Integralbegriff ist historisch aus dem Problem der Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten hervorgegangen. Die ersten Arbeiten hierzu gehen auf griechische Mathematiker der Antike, insbesondere ARCHIMEDES, zurück. Wichtige Vorarbeiten zum Integralbegriff wurden später von DESCARTES, GALILEI, KEPLER, FERMAT und HYGENS geleistet.

Von NEWTON und LEIBNIZ wurden dann die Begriffe des Integrals und der Ableitung geschaffen, als Kalkül ausgearbeitet und als Instrument bei der Untersuchung zahlreicher Probleme der Analysis eingesetzt.

Nachdem sich der Begriff der Stetigkeit einer Funktion über einen längeren historischen Zeitraum herausgebildet hatte, wurde von CAUCHY das Integral einer stetigen Funktion einer reellen Veränderlichen definiert. Das Problem der Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe führte im Zusammenhang mit der Bestimmung der Koeffizienten (= FOURIER-Koeffizienten) einer solchen Reihe zur Notwendigkeit der Definition des Integralbegriffs für eine große Klasse von Funktionen, insbesondere für unstetige Funktionen. Angeregt durch Untersuchungen von DIRICHLET über trigonometrische Reihen (und vermutlich auch durch direkten persönlichen Kontakt mit DIRICHLET) entwickelte RIEMANN in seiner Habilitationsschrift *"Über die Darstellung einer Function durch eine trigonometrische Reihe"* (1854) einen Integralbegriff, der die Integration nicht nur stetiger, sondern auch gewisser unstetiger Funktionen gestattet.

RIEMANNs Habilitationsschrift wurde erst nach längerer Verzögerung im Jahre 1868 publiziert, zwei Jahre nach seinem frühen Tod. Das Bekanntwerden dieser Arbeit von RIEMANN führte zu einer Intensivierung der Untersuchungen des Integralbegriffs. Bedeutende Beiträge hierzu wurden u.a. von DARBOUX, HANKEL und du BOIS-REYMOND geleistet.

1.1 Definition des RIEMANN-Integrals

1.1.1 RIEMANNs Definition des Integrals

CAUCHY entwickelte in [ ] einen Integralbegriff für stetige Funktionen $f : [a, b] \to I\!R$. Bei der Begründung der Konvergenz der Integralsummen für f bei gegen Null konvergierender Feinheit der Zerlegungen von $[a, b]$ benutzte er dabei die Stetigkeit von f im Sinne der gleichmäßigen Stetigkeit auf dem Intervall $[a, b]$ [1)].

[1)] Vgl. 1.1.3 Historische Notizen.

RIEMANN knüpfte mit seiner Habilitationsschrift [ ] sowohl an CAUCHYs Arbeiten als auch an DIRICHLETs Untersuchungen über trigonometrische Reihen [ ] an. RIEMANNs Ziel bestand hierbei zunächst darin, bei der Definition des bestimmten Integrals einer Funktion auf deren Stetigkeit zu verzichten, um die Integration "möglichst vieler" unstetiger Funktionen zu ermöglichen. Seine Definition des bestimmten Integrals lautet wie folgt:

" Also zuerst: Was hat man unter $\int\limits_a^b f(x)dx$ *zu verstehen?*

Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ *an und bezeichnen der Kürze wegen* $x_1 - a$ *durch* $\delta_1, x_2 - x_1$ *durch* $\delta_2, \cdots, b - x_{n-1}$ *durch* δ_n *und durch* ε *einen positiven ächten Bruch.*
Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \cdots \\ + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ *und der Grösse* ε *abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch* δ *und* ε *gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche* δ *unendlich klein werden, so heisst dieser Werth* $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Hat sie diese Eigenschaft nicht, so hat $\int\limits_a^b f(x)dx$ *keine Bedeutung."*

(vgl. [; S.]).

Wir formulieren diese Definition (mit den heute üblichen Notationen) etwas ausführlicher.

Ein $(n+1)-$tupel $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ heißt **Zerlegung des Intervalls** $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$, wenn

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Wir setzen

$$|\mathcal{Z}| := \max\{x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \cdots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Die Zahl $|\mathcal{Z}|$ charakterisiert die "Feinheit der Zerlegung $\mathcal{Z}$".

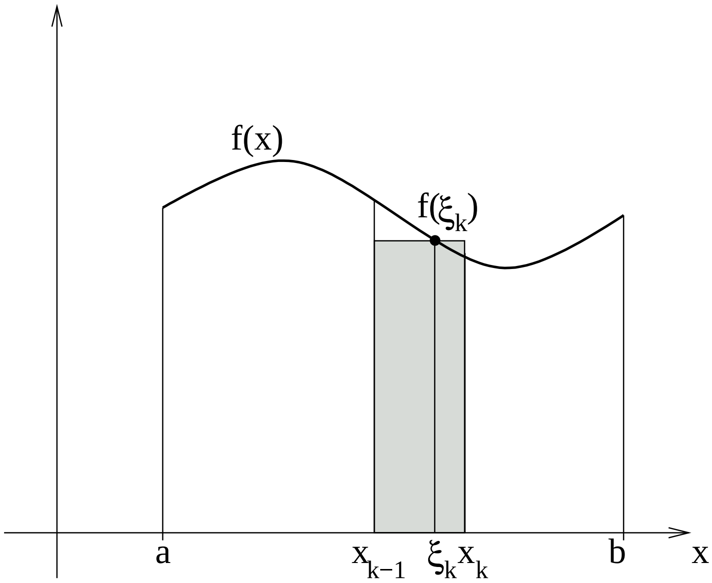
$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ heißt **n-tupel von Zwischenpunkten für die Zerlegung** $\mathcal{Z}$, wenn

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \qquad (k = 1, \cdots, n).$$

Sei $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ ein n-tupel von Zwischenpunkten für $\mathcal{Z}$. Für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt dann

$$\sigma(f; \mathcal{Z}, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

RIEMANN**sche Integralsumme** für f bezüglich $\mathcal{Z}$ **und** ξ.



1.1.1 Definition (Riemann [ ]). *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to I\!R$*[2] *heißt* **integrierbar** *auf $[a,b]$, wenn eine Zahl $I \in I\!R$ mit folgender Eigenschaft existiert:*

> *für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$ mit $|\mathcal{Z}| \leq \delta$ und alle n-tupel ξ von Zwischenpunkten für $\mathcal{Z}$ gilt:*
>
> $$\Big|\sigma(f;\mathcal{Z},\xi) - I\Big| \leq \varepsilon.$$

Die in Definition 1.1.1 auftretende Zahl I ist eindeutig bestimmt. I heißt Riemann-**Integral** von$f$ über $[a,b]$ und wird (traditionell) mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

bezeichnet.

Beschränkte Funktionen $f : [a,b] \to I\!R$, die im Sinne von Definition 1.1.1 integrierbar sind, bezeichnen wir im weiteren als R-integrierbar. ■

Riemann untersucht in [ ] im Anschluß an seine Definition des Integrals "wie unstetig" eine Funktion sein kann, um in dem oben definierten Sinne integrierbar zu sein:

---

[2] $f : [a,b] \to I\!R$ heißt *beschränkt*, wenn eine Konstante $K_0 < +\infty$ existiert, so daß $|f(x)| \leq K_0$ für alle $x \in [a,b]$.

"Untersuchen wir jetzt zweitens den Umfang der Gültigkeit dieses Begriffs oder die Frage: in welchen Fällen lässt eine Function eine Integration zu und in welchen nicht?

Wir betrachten zunächst den Integralbegriff im engeren Sinne, d. h. wir setzen voraus, dass die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden, convergirt. Bezeichnen wir also die grösste Schwankung der Function zwischen a und x_1 , d. h. den Unterschied ihres grössten und kleinsten Werthes in diesem Intervalle, durch D_1, zwischen x_1 und x_2 durch $D_2 \cdots$, zwischen x_{n-1} und b durch D_n so muss

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$$

mit den Grössen δ unendlich klein werden. Wir nehmen ferner an, dass, so lange sämtliche δ kleiner als d bleiben, der grösste Werth, den diese Summe erhalten kann, Δ sei; Δ wird alsdann eine Function von d sein, welche mit d immer abnimmt und mit dieser Grösse unendlich klein wird. Ist nun die Gesammtgrösse der Intervalle, in welchen die Schwankungen grösser als σ sind, = s, so wird der Beitrag dieser Intervalle zur Summe $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$ offenbar $\geqq \sigma s$. Man hat daher

$$\sigma s \overset{=}{<} \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n \overset{=}{<} \Delta, \text{ folglich } s \overset{=}{<} \tfrac{\Delta}{\sigma}.$$

$\dfrac{\Delta}{\sigma}$ kann nun, wenn σ gegeben ist, immer durch geeignete Wahl von d beliebig klein gemacht werden; dasselbe gilt daher von s, und es ergiebt sich also:

Damit die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden, convergirt, ist ausser der Endlichkeit der Function $f(x)$ noch erforderlich, dass die Gesammtgrösse der Intervalle, in welchen die Schwankungen $> \sigma$ sind, was auch σ sei, durch geeignete Wahl von d beliebig klein gemacht werden kann. " (vgl. loc. cit., S. 239-241).

Wir formulieren dieses Kriterium und dessen Beweis ausführlicher.

Sei $f : [a,b] \to I\!R$ eine beschränkte Funktion. Die Zahl

$$\underset{[t_1,t_2]}{\operatorname{osc}} f := \sup_{x' \in [t_1,t_2]} f(x') - \inf_{x'' \in [t_1,t_2]} f(x'')$$

heißt **Schwankung von f auf dem Intervall** $[t_1, t_2] \subseteq [a, b]$. Die folgenden Aussagen sind leicht zu bestätigen:

1. $\underset{[t_1,t_2]}{\operatorname{osc}} f = \sup\limits_{x',x'' \in [t_1,t_2]} \Big| f(x') - f(x'') \Big|$;
2. *f ist unstetig in* $x_0 \in [a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{r \to 0} \underset{[x_0-r,x_0+r]\cap[a,b]}{\operatorname{osc}} f > 0.$

Sei $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Riemanns Erkenntnis bestand nun darin, daß für unstetige Funktionen f die Konvergenz der Integralsummen $\sigma(f; \mathcal{Z}, \xi)$ für $|\mathcal{Z}| \to 0$ immer dann gesichert wird, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f "klein" ist, genauer, wenn die Gesamtlänge derjenigen Intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ mit $\underset{[x_{k-1},x_k]}{\operatorname{osc}} f \geq \tau > 0$ ("was auch $\tau > 0$ sei"; vgl. loc. cit. S. 241 und Satz 1.1.11) beliebig klein wird.

Sei wieder $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Der Ausdruck

$$\omega(f; \mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^{n} \left(\underset{[x_{k-1},x_k]}{\operatorname{osc}} f \right) (x_k - x_{k-1})$$

heißt **Schwankungssumme von f bezüglich $\mathcal{Z}$.**

Das oben zitierte Integrabilitätskriterium von RIEMANN drücken wir durch zwei Eigenschaften einer Funktion aus, die jede für sich äquivalent zu deren Integrierbarkeit im Sinne von Definition 1.1.1 ist.

1.1.2 Satz (Integrabilitätskriterium von RIEMANN) *Für eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to I\!R$ sind äquivalent:*

1° *f ist R-integrierbar auf $[a,b]$;*

2° *für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $\tau > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon, \tau) > 0$, so daß für jede Zerlegung $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ von $[a,b]$ mit $|\mathcal{Z}| \leq \delta$ gilt: es ist*

$$\sum_{i=1}^{p} \left(x_{k_i} - x_{k_{i-1}} \right) \leq \varepsilon$$

für die Gesamtheit derjenigen Intervalle $[x_{k_{i-1}, k_i}](x_{k_i} \in \mathcal{Z},\ i = 1, \ldots, p;\ p \leq n)$, für die

$$\operatorname*{osc}_{[x_{k_{i-1}}, x_{k_i}]} f \ \geq\ \tau;$$

gilt;

3° *für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$ mit $|\mathcal{Z}| \leq \delta$ gilt:*

$$\omega(f; \mathcal{Z}) \leq \varepsilon.$$

Um den Beweis dieses Satzes übersichtlich zu gestalten, führen wir folgende Bezeichnungen ein. Die Schwankungssumme $\omega(f; \mathcal{Z})$ von f bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ kann als Differenz von zwei Summen geschrieben werden:

$$\omega(f; \mathcal{Z}) = S(f; \mathcal{Z}) - s(f; \mathcal{Z}),$$

wobei

$$S(f; \mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{x' \in [x_{k-1}, x_k]} f(x') \right) (x_k - x_{k-1}),$$

$$s(f; \mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^{n} \left(\inf_{x'' \in [x_{k-1}, x_k]} f(x'') \right) (x_k - x_{k-1})^{3)}.$$

Aus der Definition dieser beiden Summen folgt unmittelbar:

$$s(f; \mathcal{Z}) \leq S(f; \mathcal{Z}),$$

3) Die Summen $S(f; \mathcal{Z})$ und $s(f; \mathcal{Z})$ erscheinen weder in RIEMANNs Habilitationsschrift [ ] noch in seinen späteren Publikationen. Die Obersumme $S(f; \mathcal{Z})$ und die Untersumme $s(f; \mathcal{Z})$ wurden von DARBOUX [ ] bei seiner Definition des (RIEMANN-) Integrals benutzt (vgl. Abschn. 1.1.2). In den Arbeiten von RIEMANN und DARBOUX wurde außerdem weder die Epsilontik noch die Limes-Schreibweise benutzt. Beides wurde erst später von WEIERSTRAß eingeführt.

$$
(1.1) \qquad \begin{cases} s(f;\mathcal{Z}) \le \sigma(f;\mathcal{Z},\xi) \le S(f;\mathcal{Z}) \\ \\ \textit{für alle } n-\textit{tupel } \xi \textit{ von Zwischenpunkten für } \mathcal{Z}. \end{cases}
$$

Beweis von Satz 1.1.2 $\boxed{1^0 \Rightarrow 2^0}$ Nach Voraussetzung existiert eine Zahl $I \in \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft: für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $\tau > 0$ gibt es ein $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon\tau}{4}\right) > 0$ [4)], so daß

$$
\Big|\sigma(f;\mathcal{Z},\xi) - I\Big| \le \frac{\varepsilon\tau}{4}
$$

für alle Zerlegungen $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ von $[a,b]$ mit $|\mathcal{Z}| \le \delta$ und alle n-tupel ξ von Zwischenpunkten für $\mathcal{Z}$ gilt.

In jedem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$, das mit den Teilpunkten einer solchen Zerlegung $\mathcal{Z}$ gebildet wird, finden sich Zahlen ξ'_k, ξ''_k mit

$$
f(\xi'_k) \ge \sup_{x' \in [x_{k-1},x_k]} f(x') - \frac{\varepsilon\tau}{4(b-a)},
$$

$$
f(\xi''_k) \le \inf_{x'' \in [x_{k-1},x_k]} f(x'') + \frac{\varepsilon\tau}{4(b-a)}
$$

$(k = 1, \cdots, n)$. Multiplikation dieser Ungleichungen mit $x_k - x_{k-1}$ und Summation über $k = 1, \cdots, n$ ergibt

$$
(1.2) \qquad \sigma(f,\mathcal{Z},\xi') \ge S(f;\mathcal{Z}) - \frac{\varepsilon\tau}{4}, \quad \sigma(f;\mathcal{Z},\xi'') \le s(f;\mathcal{Z}) + \frac{\varepsilon\tau}{4}
$$

$(\xi' = (\xi'_1, \cdots, \xi'_n),\ \xi'' = (\xi''_1, \cdots, \xi''_n))$.

Seien nun $[x_{k_{i-1}}, x_{k_i}]$ $(x_{k_i} \in \mathcal{Z},\ i = 1, \cdots, p;\ p \le n)$ diejenigen Intervalle, für die

$$
\operatorname*{osc}_{[x_{k_{i-1}},x_{k_i}]} f \ \ge\ \tau
$$

gilt. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\tau \sum_{i=1}^{p} (x_{k_i} - x_{k_{i-1}}) &\le \sum_{i=1}^{p} \left(\operatorname*{osc}_{[x_{k_{i-1}},x_{k_i}]} f \right) (x_{k_i} - x_{k_{i-1}}) \\
&\le \omega(f;\mathcal{Z}) = S(f;\mathcal{Z}) - s(f;\mathcal{Z}) \\
&\le \left(\sigma(f;\mathcal{Z},\xi') + \frac{\varepsilon\tau}{4}\right) - \left(\sigma(f;\mathcal{Z},\xi'') - \frac{\varepsilon\tau}{4}\right) \ \text{[wegen (1.2)]} \\
&= \Big(\sigma(f;\mathcal{Z},\xi') - I\Big) - \Big(\sigma(f;\mathcal{Z},\xi'') - I\Big) + \frac{\varepsilon\tau}{2} \\
&\le \frac{\varepsilon\tau}{4} + \frac{\varepsilon\tau}{4} + \frac{\varepsilon\tau}{2} = \varepsilon\tau,
\end{aligned}
$$

also

$$
\sum_{i=1}^{p} (x_{k_i} - x_{k_{i-1}}) \le \varepsilon.
$$

---

4) D. h. wir notieren Definition 1.1.1 mit $\frac{\varepsilon\tau}{4}$ anstelle von ε. Wir setzen dann: $\delta(\varepsilon,\tau) := \delta\left(\frac{\varepsilon\tau}{4}\right)$.

$\boxed{2^\circ \Rightarrow 3^\circ}$ Wir setzen $K_1 := 2K_0 + b - a$ [5]. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wir notieren 2^0 mit $\dfrac{\varepsilon}{K_1}$ anstelle von ε als auch anstelle von τ. Das bedeutet, daß ein $\delta = \delta(\varepsilon) := \delta\left(\dfrac{\varepsilon}{K_1}, \dfrac{\varepsilon}{K_1}\right) > 0$ existiert, so daß für jede Zerlegung $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ von $[a,b]$ mit $|\mathcal{Z}| \leq \delta$ gilt: $\sum_{i=1}^{p}(x_{k_i} - x_{k_{i-1}}) \leq \dfrac{\varepsilon}{K_1}$ für die Gesamtheit derjenigen Intervalle $[x_{k_{i-1}}, x_{k_i}]$ $(x_{k_i} \in \mathcal{Z}, i = 1, \ldots, p;\ p \leq n)$, für die

$$\operatorname*{osc}_{[x_{k_{i-1}}, x_{k_i}]} f \geq \frac{\varepsilon}{K_1}$$

ist. Falls $p < n$, so seien $[x_{l_{j-1}}, x_{l_j}] (x_{l_j} \in \mathcal{Z}, j = 1, \cdots, q;\ p + q = n)$ die verbleibenden Intervalle. Für diese Intervalle gilt dann

$$\operatorname*{osc}_{[x_{l_{j-1}}, x_{l_j}]} f < \frac{\varepsilon}{K_1} \ (j = 1, \cdots, q).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\omega(f; \mathcal{Z}) &= \sum_{i=1}^{p}\left(\operatorname*{osc}_{[x_{k_{i-1}}, x_{k_i}]} f\right)(x_{k_i} - x_{k_{i-1}}) + \sum_{j=1}^{q}\left(\operatorname*{osc}_{[x_{l_{j-1}}, x_{l_j}]} f\right)(x_{l_j} - x_{l_{j-1}}) \\
&\leq 2K_0 \sum_{i=1}^{p}(x_{k_i} - x_{k_{i-1}}) + \frac{\varepsilon}{K_1}\sum_{j=1}^{q}(x_{l_j} - x_{l_{j-1}}) \\
&\leq 2K_0 \cdot \frac{\varepsilon}{K_1} + \frac{\varepsilon}{K_1} \cdot (b - a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\boxed{3^\circ \Rightarrow 1^\circ}$ Wir zeigen: 3° impliziert die Existenz einer Zahl $I \in \mathbb{R}$, so daß für jede Folge $(\mathcal{Z}^{(m)})$ von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim_{m\to\infty} |\mathcal{Z}^{(m)}| = 0$ und jede Folge von n-tupeln $(\xi^{(m)})$ von Zwischenpunkten für $\mathcal{Z}^{(m)}$ gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \sigma(f; \mathcal{Z}^{(m)}, \xi^{(m)}) = I.$$

Dies bedeutet, daß 1^0 erfüllt ist.

Sei $(\mathcal{Z}^{(m)})$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim_{m\to\infty} |\mathcal{Z}^{(m)}| = 0$. Aus 3° folgt

$$0 = \lim_{m\to\infty} \omega(f; \mathcal{Z}^{(m)}) = \lim_{m\to\infty} (S(f; \mathcal{Z}^{(m)}) - s(f; \mathcal{Z}^{(m)})).$$

Da die Folgen $(S(f; \mathcal{Z}^{(m)}))$ und $(s(f; \mathcal{Z}^{(m)}))$ beschränkt sind, ergibt sich

$$\lim_{m\to\infty} S(f; \mathcal{Z}^{(m)}) = \lim_{m\to\infty} s(f; \mathcal{Z}^{(m)}). \tag{1.3}$$

Dieser gemeinsame Grenzwert der beiden Folgen $(S(f; \mathcal{Z}^{(m)}))$ und $(s(f; \mathcal{Z}^{(m)}))$ ist eine reelle Zahl, die wir mit I bezeichnen.

Die Zahl I hängt nicht von der Folge $(\mathcal{Z}^{(m)})$ ab. In der Tat, ist $(\hat{\mathcal{Z}}^{(m)})$ eine andere Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim_{m\to\infty} |\hat{\mathcal{Z}}^{(m)}| = 0$, so erhält man wie soeben

$$\lim_{m\to\infty} S(f; \hat{\mathcal{Z}}^{(m)}) = \lim_{m\to\infty} s(f; \hat{\mathcal{Z}}^{(m)}) = \hat{I} \ (\in \mathbb{R}).$$

---

[5] Vgl. Fußn. 2.

Durch Bildung einer Mischfolge aus $(\mathcal{Z}^{(m)})$ und $(\hat{\mathcal{Z}}^{(m)})$ folgt

$$\hat{I} = I.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Sei nun $(\mathcal{Z}^{(m)})$ irgendeine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} |\mathcal{Z}^{(m)}| = 0$. Wegen (1.3) existiert ein $m_0 = m_0(\varepsilon)$, so daß

$$\left|S(f;\mathcal{Z}^{(m)}) - I\right| \leq \varepsilon, \quad \left|s(f;\mathcal{Z}^{(m)}) - I\right| \leq \varepsilon$$

für alle $m \geq m_0$ gilt. Für beliebige n-tupel $\xi^{(m)}$ von Zwischenpunkten für $\mathcal{Z}^{(m)}$ gilt

$$s(f;\mathcal{Z}^{(m)}) \leq \sigma(f;\mathcal{Z}^{(m)},\xi^{(m)}) \leq S(f;\mathcal{Z}^{(m)}) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

(vgl. (1.1)). Für alle $m \geq m_0$ gilt daher

$$\begin{aligned} \sigma(f;\mathcal{Z}^{(m)},\xi^{(m)}) - I &\leq S(f;\mathcal{Z}^{(m)}) - I \leq \varepsilon, \\ I - \sigma(f;\mathcal{Z}^{(m)};\xi^{(m)}) &\leq I - s(f;\mathcal{Z}^{(m)}) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

also

$$\left|\sigma(f;\mathcal{Z}^{(m)},\xi^{(m)}) - I\right| \leq \varepsilon.$$

■

1.1.2 Die Darbouxsche Definition des Integrals

Der Beweis der Implikation von $3^\circ \Rightarrow 1^0\circ$ von Satz 1.1.2 deutet darauf hin, daß die R-Integrierbarkeit einer beschränkten Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ausschließlich mit Hilfe der Summen $S(f;\mathcal{Z})$ und $s(f;\mathcal{Z})$ charakterisiert werden kann. Dies wurde von Darboux [ ](1875) erkannt.

Wir geben nun die Definition des (Riemann-)Integrals nach Darboux und zeigen deren Äquivalenz zu Definition 1.1.1. Hierzu führen wir zunächst einige Bezeichnungen ein.

Seien $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}^*$ Zerlegungen von $[a,b]$. $\mathcal{Z}^*$ heißt **Verfeinerung** von $\mathcal{Z}$, wenn $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}^*$. Es gilt:

1. *Ist $\mathcal{Z}^*$ Verfeinerung von $\mathcal{Z}$, so gilt $|\mathcal{Z}^*| \leq |\mathcal{Z}|$.*
2. *Die Vereinigung $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ von zwei Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ ist Verfeinerung von $\mathcal{Z}_1$ und von $\mathcal{Z}_2$.*

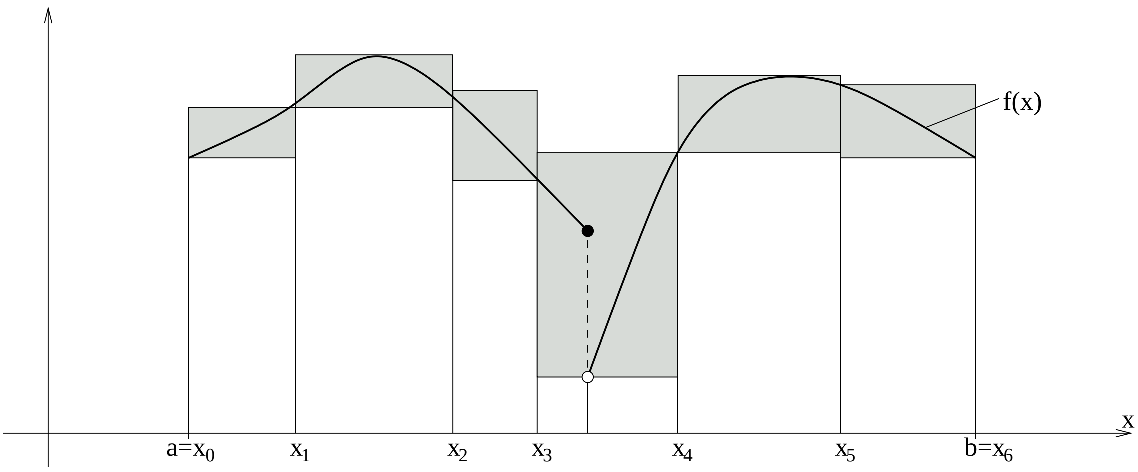
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion (vgl. Fußnote ...). Sei $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Wir definieren:

$$M_k(f) := \sup_{x' \in [x_{k-1},x_k]} f(x'), \qquad m_k(f) := \inf_{x'' \in [x_{k-1},x_k]} f(x''),$$

und

$$\begin{aligned} s(f;\mathcal{Z}) &:= \sum_{k=1}^{n} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{Darboux\textbf{sche Untersumme,}} \\ S(f;\mathcal{Z}) &:= \sum_{k=1}^{n} M_k(f)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{Darboux\textbf{sche Obersumme.}} \end{aligned}$$

(vgl. S. 7).



$\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \ldots, x_6\}$, graue Fläche $= S(f; \mathcal{Z}) - s(f; \mathcal{Z})$

1.1.4 Lemma *Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Dann gilt für jede Verfeinerung $\mathcal{Z}^*$ von $\mathcal{Z}$:*

$$s(f; \mathcal{Z}) \leq s(f; \mathcal{Z}^*), \quad S(f; \mathcal{Z}^*) \leq S(f; \mathcal{Z}). \tag{1.4}$$

Beweis (für $s(f; \mathcal{Z})$). Sei $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Die Verfeinerung $\mathcal{Z}^*$ enthalte einen Teilpunkt mehr als $\mathcal{Z}$, also $\mathcal{Z}^* = (x_0, \cdots, x_{l-1}, t, x_l, \cdots, x_n)$ $(x_{l-1} < t < x_l)$. Wegen

$$\inf_{x \in [x_{l-1}, t]} f(x) \geq m_l(f), \qquad \inf_{x \in [t, x_l]} f(x) \geq m_l(f)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
s(f; \mathcal{Z}^*) = & \sum_{k=1}^{l-1} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) \\
& + \left(\inf_{x \in [x_{l-1}, t]} f(x) \right) (t - x_{l-1}) + \left(\inf_{x \in [t, x_l]} f(x) \right) (x_l - t) \\
& + \sum_{k=l+1}^{n} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) \\
\geq & \sum_{k=1}^{n} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) \qquad (1.5) \\
= & \; s(f; \mathcal{Z}).
\end{aligned}$$

Enthält die Verfeinerung $\mathcal{Z}^*$ jedoch $p > 1$ Teilpunkte, die nicht in der Zerlegung $\mathcal{Z}$ auftreten, so erhält man eine zu (1.5) analoge Ungleichung, deren linke Seite $2p$ zusätzliche Summanden im Vergleich zur Summe $s(f; \mathcal{Z})$ enthält. Daher gilt die linke Ungleichung in (1.4) für eine beliebige Verfeinerung $\mathcal{Z}^*$ von $\mathcal{Z}$.

Die rechte Ungleichung in (1.4) erhält man mit Hilfe einer analogen Argumentation. ∎

1.1.5 Folgerung 1. *Für je zwei Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ von $[a,b]$ gilt*

$$s(f;\mathcal{Z}_1) \le S(f;\mathcal{Z}_2).$$

2. *Es gilt*

$$\sup_{\mathcal{Z}'\in\{\mathcal{Z}\}} s(f;\mathcal{Z}') \le \inf_{\mathcal{Z}''\in\{\mathcal{Z}\}} S(f;\mathcal{Z}'')\ ^{6)}.$$

Beweis 1. $\mathcal{Z}^* := \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ ist Verfeinerung sowohl von $\mathcal{Z}_1$ als auch von $\mathcal{Z}_2$. Aus der offensichtlichen Ungleichung $s(f;\mathcal{Z}^*) \le S(f;\mathcal{Z}^*)$ und Lemma 1.1.4 folgt

$$s(f;\mathcal{Z}_1) \le s(f;\mathcal{Z}^*) \le S(f;\mathcal{Z}^*) \le S(f;\mathcal{Z}_2).$$

2. Die Behauptung folgt aus 1. ■

1.1.6 Definition (Darboux [ ]) *Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ heißt* **integrierbar**, *wenn*

$$\sup_{\mathcal{Z}'\in\{\mathcal{Z}\}} s(f;\mathcal{Z}') = \inf_{\mathcal{Z}''\in\{\mathcal{Z}\}} S(f;\mathcal{Z}'').$$

Es gilt nun

1.1.7 Satz (Darboux [ ]) *Für eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sind äquivalent:*

1° *f ist R-integrierbar auf* $[a,b]$;

2° $\sup_{\mathcal{Z}\in\{\mathcal{Z}'\}} s(f;\mathcal{Z}') = \inf_{\mathcal{Z}\in\{\mathcal{Z}''\}} S(f;\mathcal{Z}'').$

3° *für jedes $\varepsilon>0$ existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ von $[a,b]$, so daß*

$$S(f;\mathcal{Z}\varepsilon) - s(f;\mathcal{Z}_\varepsilon) \le \varepsilon.$$

Beweis $\boxed{1° \Rightarrow 2°}$ Sei $\varepsilon>0$ beliebig gewählt. Wegen Satz 1.1.2 / 3^0 existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$ mit $|\mathcal{Z}| \le \delta$ gilt

$$S(f;\mathcal{Z}) - s(f;\mathcal{Z}) = \omega(f;\mathcal{Z}) \le \varepsilon.$$

Wir betrachten eine solche Zerlegung. Mit Hilfe von Folgerung 1.1.5 erhält man

$$\begin{aligned} 0 &\le \inf_{\mathcal{Z}''\in\{\mathcal{Z}\}} S(f;\mathcal{Z}'') - \sup_{\mathcal{Z}'\in\{\mathcal{Z}\}} s(f;\mathcal{Z}') \\ &\le S(f;\mathcal{Z}) - s(f;\mathcal{Z}) \\ &\le \varepsilon. \end{aligned}$$

Daher gilt 2°.

---

6) Wir definieren:
$\{\mathcal{Z}\}$ = Menge der Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ (das Intervall $[a,b]$ ist bei allen Betrachtungen dieses Abschnitts fixiert.)

$\boxed{2^\circ \Rightarrow 3^\circ}$ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann existieren Zerlegungen $\mathcal{Z}_{1,\varepsilon}$ und $\mathcal{Z}_{2,\varepsilon}$ von $[a,b]$, so daß

$$s(f;\mathcal{Z}_{1,\varepsilon}) \geq \sup_{\mathcal{Z}'\in\{\mathcal{Z}\}} s(f;\mathcal{Z}') - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(f;\mathcal{Z}_{2,\varepsilon}) \leq \inf_{\mathcal{Z}''\in\{\mathcal{Z}\}} S(f;\mathcal{Z}'') + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon := \mathcal{Z}_{1,\varepsilon} \cup \mathcal{Z}_{2,\varepsilon}$ ist Verfeinerung von $\mathcal{Z}_{1,\varepsilon}$ und $\mathcal{Z}_{2,\varepsilon}$. Daher gilt

$$\begin{aligned} S(f;\mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f;\mathcal{Z}_\varepsilon) &\leq S(f;\mathcal{Z}_{2,\varepsilon}) - s(f;\mathcal{Z}_{1,\varepsilon}) \\ &\leq \inf_{\mathcal{Z}''\in\{\mathcal{Z}\}} S(f;\mathcal{Z}'') + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\sup_{\mathcal{Z}'\in\{\mathcal{Z}\}} s(f;\mathcal{Z}') - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

$\boxed{3^\circ \Rightarrow 1^\circ}$ Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ von $[a,b]$, so daß

$$S(f;\mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f;\mathcal{Z}_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Wegen

$$\inf_{\mathcal{Z}''\varepsilon\{\mathcal{Z}\}} S(f;\mathcal{Z}'') - \sup_{\mathcal{Z}'\in\{\mathcal{Z}\}} s(f;\mathcal{Z}') \leq S(f;\mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f;\mathcal{Z}_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

folgt

$$\inf_{\mathcal{Z}''\in\{\mathcal{Z}\}} S(f;\mathcal{Z}'') = \sup_{\mathcal{Z}'\in\{\mathcal{Z}\}} s(f;\mathcal{Z}') \ ^{7)}.$$

Diesen (gemeinsamen) Wert bezeichnen wir mit I.

Wir zeigen: *für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$ mit $\|\mathcal{Z}\| \leq \delta$ und alle n-tupel ξ von Zwischenpunkten für $\mathcal{Z}$ gilt:*

$$|\sigma(f;\mathcal{Z},\xi) - I| \leq \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann existieren Zerlegungen $\mathcal{Z}_{1,\varepsilon}$ und $\mathcal{Z}_{2,\varepsilon}$ von $[a,b]$, so daß

$$s(f;\mathcal{Z}_{1,\varepsilon}) \geq I - \frac{\varepsilon}{2}, \quad S(f;\mathcal{Z}_{2,\varepsilon}) \leq I + \frac{\varepsilon}{2}\ . \tag{1.6}$$

Wir setzen $\mathcal{Z}_\varepsilon := \mathcal{Z}_{1,\varepsilon} \cup \mathcal{Z}_{2,\varepsilon}$. Aus Lemma 1.1.4 folgt dann

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} s(f;\mathcal{Z}_{1,\varepsilon}) & \leq & s(f;\mathcal{Z}_\varepsilon) & \leq & s(f;\mathcal{Z}\cup\mathcal{Z}_\varepsilon), \\ S(f;\mathcal{Z}_{2,\varepsilon}) & \geq & S(f;\mathcal{Z}_\varepsilon) & \geq & S(f;\mathcal{Z}\cup\mathcal{Z}_\varepsilon) \end{array} \right. \tag{1.7}$$

für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$.

Die Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ können wir schreiben als

$$\mathcal{Z}_\varepsilon = (x_{\varepsilon,0}, x_{\varepsilon,1}, \ldots, x_{\varepsilon,l}) \qquad (l = l(\varepsilon) \geq 2).$$

Wir setzen $\delta := \dfrac{\varepsilon}{6(l-1)K_0}$ [8]. Sei $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $\|\mathcal{Z}\| \leq \delta$.

[7] Damit ist unmittelbar die Äquivalenz von 2^0 und 3^0 gezeigt.

[8] K_0 ist eine Schranke für $\{|f(x)| \,\big|\, x \in [a,b]\}$ (vgl. Fußnote ...).

Sei $l = 2$, d. h. $\mathcal{Z}_\varepsilon = (a, t, b)$ $(x_{\varepsilon,0} = a, x_{\varepsilon,1} = t, x_{\varepsilon,2} = b;\ a < t < b)$. Dann ist entweder $t = x_j$ für ein $j \in \{1, \cdots, n-1\}$ oder $x_{j-1} < t < x_j$ für ein $j \in \{1, \cdots, n\}$. Im ersten Falle gilt $\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}_\varepsilon = \mathcal{Z}$ und daher

$$s(f; \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}_\varepsilon) = s(f; \mathcal{Z}),$$

während im zweiten Falle gilt

$$\begin{aligned}
s(f; \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}_\varepsilon) &= s(f; \mathcal{Z}) + \left(\inf_{x \in [x_{j-1}, t]} f(x) \right)(t - x_{j-1}) + \left(\inf_{x \in [t, x_j]} f(x) \right)(x_j - t) \\
&\quad - m_j(f)(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq s(f; \mathcal{Z}) + 3K_0(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq s(f; \mathcal{Z}) + 3K_0 |\mathcal{Z}| \\
&\leq s(f; \mathcal{Z}) + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Falls $l \geq 3$ ist, so kann man analog argumentieren: Die Summen $s(f; \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}_\varepsilon)$ und $s(f; \mathcal{Z})$ unterscheiden sich nur durch Summanden, deren Anzahl denjenigen Teilpunkten von $\mathcal{Z}_\varepsilon$ entspricht, die nicht zu $\mathcal{Z}$ gehören (also höchstens $l - 1$ Summanden). Das ergibt

$$\begin{aligned}
s(f; \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}_\varepsilon) &\leq s(f; \mathcal{Z}) + 3(l-1)K_0 |\mathcal{Z}| \\
&\leq s(f; \mathcal{Z}) + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (1.6) und (1.7) folgt nun mit einem beliebigen n-tupel ξ von Zwischenpunkten für $\mathcal{Z}$

$$\begin{aligned}
I - \sigma(f; \mathcal{Z}, \xi) &\leq I - s(f; \mathcal{Z}) \\
&\leq I - s(f; \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq I - s(f; \mathcal{Z}_{1,\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Durch eine analoge Überlegung erhält man für die Obersummen

$$S(f; \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}_\varepsilon) \geq S(f; \mathcal{Z}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Das ergibt

$$\begin{aligned}
\sigma(f; \mathcal{Z}, \xi) - I \leq S(f; \mathcal{Z}) - I &\leq S(f; \mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} - I \\
&\leq S(f; \mathcal{Z}_{2,\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{2} - I \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$|\sigma(f; \mathcal{Z}, \xi) - I| \leq \varepsilon$$

für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$ mit $\|\mathcal{Z}\| \leq \delta$ und alle n-tupel ξ von Zwischenpunkten für $\mathcal{Z}$. ∎

Ergänzende Bemerkungen Wir vertiefen das Studium der Konvergenzeigenschaften von Darbouxschen Ober- und Untersummen bzw. Riemannschen Integralsummen einer beschränkten Funktion f.

1.1.8 Satz *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann:*

1. *Für jede Folge $(\mathcal{Z}^{(m)})$ von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} \|\mathcal{Z}^{(m)}\| = 0$ gilt:*

$$\lim_{m\to\infty} s(f;\mathcal{Z}^{(m)}) = \sup_{\mathcal{Z}\in\{\mathcal{Z}\}} s(f;\mathcal{Z}), \qquad \lim_{m\to\infty} S(f;\mathcal{Z}^{(m)}) = \inf_{\mathcal{Z}\in\{\mathcal{Z}\}} S(f;\mathcal{Z}).$$ [9]

2. *Sei $(\mathcal{Z}^{(l)})$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$, so daß:*

   1) $\lim\limits_{l\to\infty} \|\mathcal{Z}^{(l)}\| = 0$,

   2) $\lim\limits_{l\to\infty} s(f;\mathcal{Z}^{(l)}) = \lim\limits_{l\to\infty} S(f;\mathcal{Z}^{(l)})$.

Dann ist f R-integrierbar auf $[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{l\to\infty} s(f;\mathcal{Z}^{(l)}) = \lim_{l\to\infty} S(f;\mathcal{Z}^{(l)}).$$

Beweis 1 Sei $(\mathcal{Z}^{(m)})$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} \|\mathcal{Z}^{(m)}\| = 0$. Wir schreiben $\mathcal{Z}^{(m)} = (x_{m,0}, x_{m,1}, \cdots, x_{m,n_m})$. Es gilt

$$\sup_{\mathcal{Z}\in\{\mathcal{Z}\}} s(f;\mathcal{Z}) \geq \limsup s(f;\mathcal{Z}^{(m)}). \tag{1.8}$$

Sei $\mathcal{Z}$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Wir zeigen: $\liminf s(f;\mathcal{Z}^{(m)}) \geq s(f;\mathcal{Z})$. Sei p die Anzahl der Teilpunkte von $\mathcal{Z}$, die zu $]a,b[$ gehören. Wenn $p = 1$, so ist $\mathcal{Z} = (a,t,b)\,(a < t < b)$. Falls $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}^{(m)}$, so gilt $\mathcal{Z}^{(m)} \cup \mathcal{Z} = \mathcal{Z}^{(m)}$ und daher

$$s(f;\mathcal{Z}^{(m)} \cup \mathcal{Z}) = s(f;\mathcal{Z}^{(m)}).$$

Falls t nicht unter den Teilpunkten von $\mathcal{Z}^{(m)}$ auftritt, gilt $x_{m,k-1} < t < x_{m,k}$ für ein $k \in \{1,\cdots,n_m\}$. Wie beim Beweis der Implikation $2^0 \Rightarrow 1^0$ von Satz 1.1.7 erhält man

$$s(f;\mathcal{Z}^{(m)} \cup \mathcal{Z}) \leq s(f;\mathcal{Z}^{(m)}) + 3K_0\|\mathcal{Z}^{(m)}\|.$$

Eine analoge Betrachtung wird durchgeführt falls $p > 1$ ist. Daher gilt

$$\begin{aligned} s(f;\mathcal{Z}^{(m)}) &\geq s(f;\mathcal{Z}^{(m)} \cup \mathcal{Z}) - 3p\,K_0\|\mathcal{Z}^{(m)}\| \\ &\geq s(f;\mathcal{Z}) - 3p\,K_0\|\mathcal{Z}^{(m)}\| \end{aligned}$$

(p abhängig von $\mathcal{Z}$). Wir erhalten somit

$$\liminf s(f;\mathcal{Z}^{(m)}) \geq s(f;\mathcal{Z}).$$

Das ergibt

$$\liminf s(f;\mathcal{Z}^{(m)}) \geq \sup_{\mathcal{Z}\in\{\mathcal{Z}\}} s(f;\mathcal{Z}). \tag{1.9}$$

Aus (1.8) und (1.9) folgt die Behauptung für die Untersummen.

Die Behauptung für die Obersummen erhält man durch eine analoge Betrachtung.

[9] Vgl. Fußnote ...

(2) Sei $(\mathcal{Z}^{(l)})$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$, so daß $\lim\limits_{l\to\infty} \|\mathcal{Z}^{(l)}\| = 0$ und

$$\lim_{l\to\infty} s(f;\mathcal{Z}^{(l)}) = \lim_{l\to\infty} S(f;\mathcal{Z}^{(l)}).$$

Aus Teil 1 folgt

$$\sup_{\mathcal{Z}'\in\{\mathcal{Z}\}} s(f;\mathcal{Z}') = \inf_{\mathcal{Z}''\in\{\mathcal{Z}\}} S(f;\mathcal{Z}'').$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus Satz 1.1.7. ∎

Berechnung des Integrals mit Hilfe spezieller Zerlegungen. *Sei f R-integrierbar auf* $[a,b]$. Formel (1.10) besagt, daß zur Berechnung von $\int\limits_a^b f(x)dx$ **eine** (speziell gewählte) Folge von Zerlegungen $(\mathcal{Z}^{(l)})$ von $[a,b]$ mit $\lim\limits_{l\to\infty} \|\mathcal{Z}^{(l)}\| = 0$, und **irgendeine** Folge von Zwischenpunkten für $\mathcal{Z}^{(l)}$ benutzt werden können.

Wir betrachten hierzu zwei Beispiele.

$\boxed{1}$ *Äquidistante Zerlegung von* $[a,b]$. Sei $\mathcal{Z}^{(l)} = (x_{l,0}, x_{l,1}, \cdots, x_{l,l})$, wobei

$$x_{l,j} := a + \tfrac{b-a}{l}\, j, \qquad j = 0,1,\cdots,l \ (l \in I\!N).$$

Es gilt

$$\|\mathcal{Z}^{(l)}\| = \max\{x_{l,1}-x_{l,0},\cdots,x_{l,l}-x_{l,l-1}\} = \frac{b-a}{l} \to 0 \quad \text{für} \quad l\to\infty.$$

Für jede Folge $(\xi^{(l)})$ $(\xi^{(l)} = (\xi_{l,1},\cdots,\xi_{l,l}),\ \xi_{l,j} \in [x_{l,j-1}, x_{l,j}]$ $(j = 1,\cdots,l))$ gilt somit

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a) \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} f(\xi_{l,j}).$$

$\boxed{2}$ *Zerlegung von* $[a,b]$ *in geometrischer Progression.* Sei $0 < a < b$. Wir setzen $q = \sqrt[l]{\dfrac{b}{a}}$ $(l \in I\!N)$ und $x_{l,0} := a,\ x_{l,1} = aq,\ x_{l,2} = aq^2, \cdots, x_{l,l} = aq^l = b$. Für die Zerlegung $\mathcal{Z}^{(l)} = (x_{l,0}, x_{l,1},\cdots,x_{l,l})$ gilt

$$x_{l,j} - x_{l,j-1} = (q-1)aq^{j-1}, \quad j = 1,\cdots,l,$$

also

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Z}^{(l)}\| &= \max\{x_{l,1}-x_{l,0},\cdots,x_{l,l}-x_{l,l-1}\}\\ &\le (q-1)b = \left(\sqrt[l]{\frac{b}{a}} - 1\right) b \to 0 \ \text{ für } \ l\to\infty.\end{aligned}$$

Für jede Folge $(\xi^{(l)})$ $(\xi^{(l)} = (\xi_{l,1},\cdots,\xi_{l,l}),\ \xi_{l,j} \in [x_{l,j-1}, x_{l,j}]$ $(j = 1,\cdots,l)$ ergibt sich damit

$$\int\limits_a^b f(x)dx = a \lim_{l\to\infty} \left(\sqrt[l]{\frac{b}{a}} - 1\right) \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{j-1}{l}} f(\xi_{l,j}).$$ ∎

Historische Notizen. 1. In seinem Werk "*Cours d'analyse*" [ ] definiert CAUCHY die Stetigkeit einer Funktion nicht als punktweise, sondern als "gleichmäßige" Eigenschaft: "*... la fonction $f(x)$ restera continue* *par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroisement infiniment petit de la fonction celle-même"* ([; S. 43])[10].

In [ ] beweist dann CAUCHY die Integrierbarkeit von Funktionen, die in diesem Sinne auf einem Intervall $[a, b]$ stetig sind. Für eine Zerlegung $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ von $[a, b]$ betrachtet er zunächst folgende Summe:

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}).$$

Diese wird dann ersetzt durch

$$\begin{aligned} S &= (x_1 - x_0)f(x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)) + \cdots + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1} + \theta_{n-1}(x_n - x_{n-1})) \\ &= (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + \cdots + (x_n - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}]. \end{aligned}$$

Nun wird argumentiert: "*...si les élements $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \cdots, x_n - x_{n-1}$ ont des valeurs numérique très petites, chacune des quantités $\pm\varepsilon_0, \pm\varepsilon_1, \cdots, \pm\varepsilon_{n-1}$ différera trés peu de zéro ... la valeur de S finira par être sensiblement constante ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes a, b attribuées à la variable x. Cette limite est ce qu'on appelle une* **intégrale définie**" (vgl. [; S. 124-125]).

2. RIEMANN verstand offenbar die Stetigkeit einer Funktion f (ebenso sie CAUCHY) nicht als punktweise, sondern als "gleichmäßige Eigenschaft" auf der Menge, auf der f definiert ist. Dies kann man aus Anmerkung (1) in [; S. 46] entnehmen. Daher schien RIEMANN die Integrierbarkeit stetiger Funktionen für selbstverständich zu halten.

3. Die von DIRICHLET begonnenen Untersuchungen [ ] über die Konvergenz trigonometrischer Reihen führten zur Notwendigkeit der Integration unstetiger Funktionen. Die weitere Präzisierung dieses Integralbegriffs wurde von RIEMANN in seiner Habilitationsschrift [ ] (eher nebenbei) vorgenommen In [; S.] führt er sogleich ein Beispiel einer unstetigen integrierbaren Funktion an, das zeigt, daß sein Integralbegriff weiter trägt als der von CAUCHY. Diese Funktion wird als Limes einer Reihe erhalten.

Ein Beispiel einer unstetigen R-integrierbaren Funktion, das im wesentlichen die gleichen Eigenschaften wie das von RIEMANN aufweist und heute in der Literatur häufig zitiert wird, findet sich bei THOMAE [; S. 14-15] (vgl. Abschn. 1.1.3). ■

1.1.3 Klassen integrierbarer Funktionen. Beispiele

1.1.10 Satz

1. (CAUCHY [ ]) *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to I\!R$ ist R-integrierbar.*
2. *Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to I\!R$ ist R-integrierbar.*

Beweis 1 Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$ ist, existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\forall x, x' \in [a, b],\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Sei dann $\mathcal{Z}_\varepsilon = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $\|\mathcal{Z}_\varepsilon\| < \delta$. Dann gilt

$$M_k(f) - m_k(f) < \tfrac{\varepsilon}{b-a}, \quad k = 1, \cdots, n.$$

Hieraus folgt

$$S(f; \mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f; \mathcal{Z}_\varepsilon) \quad = \quad \sum_{k=1}^{m} (M_k(f) - m_k(f))\,(x_k - x_{k-1})$$

[10] Die gleichmäßige Stetigkeit einer punktweise stetigen Funktion auf einen kompakten Intervall $[a, b]$ wurde nach dem Erscheinen von CAUCHYs Arbeiten von HEINE und BOREL bewiesen.

$$
\begin{aligned}
&< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

2 (Beweis für f monoton wachsend, $f \not\equiv \text{const}$). Sei $\varepsilon > 0$. Sei $\mathcal{Z}_\varepsilon = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so daß $|\mathcal{Z}_\varepsilon| \le \dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Aus der Monotonie von f folgt:

$$
m_k(f) = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_{k-1}), \qquad M_k(f) = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_k).
$$

Das ergibt

$$
\begin{aligned}
S(f;\mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f;\mathcal{Z}_\varepsilon) &= \sum_{k=1}^{n} \Big(f(x_k) - f(x_{k-1}) \Big)(x_k - x_{k-1}) \\
&\le |\mathcal{Z}_\varepsilon| \sum_{k=1}^{n} \Big(f(x_k) - f(x_{k-1}) \Big) \\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}
$$

■

1.1.11 Satz *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Menge*

$$
E := \{ x \in [a,b] \,\big|\, f \quad \text{ist unstetig in } x \}
$$

besitze folgende Eigenschaft:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ existieren disjunkte Intervalle }]a_i, b_i[\subset [a,b] \; (i = 1, \cdots, m), \text{ so daß} \\
\qquad E \subseteq \displaystyle\bigcup_{i=1}^{m}]a_i, b_i[, \quad \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \le \varepsilon.
\end{array}
\right.
$$

Dann ist f R-integrierbar auf $[a,b]$.

Dieses Resultat ist naheliegend, wenn man das RIEMANNsche Integrabilitätskriterium und dessen äquivalente Formulierung nach DARBOUX studiert hat. Es wurde von DINI [; 2) S. 244-245] formuliert und bewiesen. Der folgende Beweis findet sich in [; 3) S. 339-340][11].

Beweis von Satz 1.1.11 Wir setzen

$$
F := [a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{m}]a_i, b_i[\;=:\; \bigcup_{j=1}^{n} [\alpha_j, \beta_j].
$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Da f stetig auf der kompakten Menge F ist, existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß

$$
|f(x) - f(x')| \le \varepsilon \qquad \forall\, x, x' \in F, \qquad |x - x'| \le \delta.
$$

[11] Der Paragraph §187* in 3) wurde DINIs Werk [; 1)] bei der dt. Übersetzung hinzugefügt. In 3) wurde auch der Begriff "Menge vom Inhalt Null" benutzt.

Sei nun $\mathcal{Z}_\varepsilon = (x_0, x_1, \ldots, x_p)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit folgender Eigenschaft: für jedes Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, p)$ gilt

$$\begin{array}{rlclcl} \text{entweder} & [x_{k-1}, x_k] & \subset & [a_i, b_i] & \text{für ein} & i \in \{1, \ldots, m\} \\ \text{oder} & [x_{k-1}, x_k] & \subset & F & \text{und} & x_k - x_{k-1} \le \delta. \end{array}$$

Die Menge derjenigen $k \in \{1, \ldots, p\}$, so daß $[x_{k-1}, x_k]$ die erste Alternative erfüllt, bezeichnen wir mit A. Für $k \in \{1, \ldots, p\} \setminus A$ gilt dann

$$M_k - m_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) - \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \le \varepsilon.$$

Mit der Bezeichnung $M := \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x), \ m := \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned} & S(f; \mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f; \mathcal{Z}_\varepsilon) = \\ & = \sum_{k \in A} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in \{1, \ldots, p\} \setminus A} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ & \le (M - m) \sum_{k \in A} (x_k - x_{k-1}) + \varepsilon \sum_{k \in \{1, \ldots, p\} \setminus A} (x_k - x_{k-1}) \\ & \le (M - m) \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i) + \varepsilon (b - a) \\ & \le (M - m + b - a)\, \varepsilon. \end{aligned}$$

Satz 1.1.7 liefert die Behauptung. ■

1.1.4 Eigenschaften des Integrals (I)

Wir beginnen mit Eigenschaften des Integrals, die unmittelbar auf Definition 1.1.6 basieren bzw. mit Hilfe von Folgerung 1.1.8 bestätigt werden können.

1.1.12 Satz

1. *Sei f R-integrierbar auf $[a,b]$. Dann gilt für jedes $c \in]a,b[$: $f\Big|_{[a,c]}$ ist R-integrierbar auf $[a,c]$, $f\Big|_{[c,b]}$ ist R-integrierbar auf $[c,b]$ und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. *Für ein $c \in]a,b[$ seien die Einschränkungen der Funktion $f : [a,b] \to I\!R$ auf $[a,c]$ und $[c,b]$ R-integrierbar. Dann ist f R-integrierbar auf $[a,b]$.*

3. *Sei $f : [a,b] \to I\!R$ beschränkt und R-integrierbar auf jedem Teilintervall $[c,d] \subset]a,b[$. Dann ist f R-integrierbar auf $[a,b]$.*

1.1.13 Folgerung (Endliche Additivität bezüglich Teilintervallen) *Sei* $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ *eine beliebige Zerlegung von* $[a,b]$.

1. *Sei* f *R-integrierbar auf* $[a,b]$. *Dann ist* $f\Big|_{[x_{k-1},x_k]}$ *R-integrierbar auf* $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \cdots, n)$ *und es gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt. \tag{1}$$

2. *Sei* f *R-integrierbar auf* $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \cdots, n)$. *Dann ist* f *R-integrierbar auf* $[a,b]$ *und es gilt* (1).

1.1.14 Satz *Für R-integrierbare Funktionen* f, g *auf* $[a,b]$ *gilt:*

1. $f + g$ *ist R-integrierbar auf* $[a,b]$, *und*

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. *Für jedes* $\lambda \in I\!R$ *ist* λf *R-integrierbar auf* $[a,b]$, *und*

$$\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

Wir setzen

$$\mathcal{R}([a,b]) := \{f : [a,b] \to I\!R \;\Big|\; f \ R\text{-integrierbar auf } [a,b]\}.$$

Aus Satz 1.1.14 folgt: $\mathcal{R}([a,b])$ *ist ein Vektorraum über* $I\!R$.

1.1.15 Satz *Sei* $f \in \mathcal{R}([a,b])$. *Dann ist* $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$ *und es gilt*

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Beweis Sei $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Es gilt

$$\Big||f(x)| - |f(x')|\Big| \leq |f(x) - f(x')| \leq M_k(f) - m_k(f) \quad \forall x, x' \in [x_{k-1}, x_k],$$

also

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) \leq M_k(f) - m_k(f)$$

$(k = 1, \cdots, n)$. Hieraus folgt

$$S(|f|; \mathcal{Z}) - s(|f|; \mathcal{Z}) \leq S(f; \mathcal{Z}) - s(f; \mathcal{Z}).$$

Aus Folgerung 1.1.8 erhält man nun $|f| \in \mathcal{R}([a,b])$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ von $[a,b]$, so daß

$$S(|f|;\mathcal{Z}_\varepsilon) \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx + \varepsilon.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)dx &= \inf_{\{\mathcal{Z}\}}\{S(f;\mathcal{Z})\} \leq S(|f|;\mathcal{Z}_\varepsilon) \\ &\leq \int\limits_a^b |f(x)|dx + \varepsilon,\end{aligned}$$

also

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

Durch Betrachtung von $-f$ anstelle von f erhält man

$$-\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b |-f(x)|dx = \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

■

Existenz einer Stammfunktion

Wir studieren nun das Problem der Existenz einer Stammfunktion für eine R-integrierbare Funktion.

Beispiele

1 *Eine R-integrierbare Funktion braucht keine Stammfunktion zu besitzen.* Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in [-1,0], \\ 1 & \text{für} \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

ist monoton auf $[-1,1]$ und daher R-integrierbar auf $[-1,1]$, besitzt aber dort keine Stammfunktion (jedoch auf den Teilintervallen $[-1,0]$ und $[0,1]$).

2 *Existiert für eine Funktion f auf einem Intervall $[a,b]$ eine Stammfunktion, so braucht f auf $[a,b]$ nicht R-integrierbar zu sein.* Für

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^2} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

ist

$$F'(x) =: f(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2} & \text{für} \quad x \neq 0, \\ \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Die Funktion f besitzt auf $\mathbb{R}$ die Stammfunktion F. f ist in jedem Intervall $[a,b]$ ($a < 0 < b$) unbeschränkt. Daher ist f nicht (in dem bisher erklärten Sinne) R-integrierbar auf $[a,b]$ ($a < 0 < b$). [12)] ■

Die Stetigkeit einer Funktion f ist hinreichend für die Existenz einer Stammfunktion für f. Dies ergibt sich aus dem folgenden

1.1.16 Satz *Sei f R-integrierbar auf $[a,b]$. Sei*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in]a,b[.$$

Ist f stetig in $x_0 \in]a,b[$, so gilt

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \qquad \forall\, x \in [a,b],\ |x - x_0| \leq \delta.$$

Für $0 < h \leq \min\{\delta, b - x_0\}$ erhält man mit Hilfe der Sätze 1.1.12 und 1.1.15

$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{h}\Big(F(x_0+h) - F(x_0)\Big) - f(x_0)\Big| &= \Big|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \Big(f(x) - f(x_0)\Big)dx\Big| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \Big|f(x) - f(x_0)\Big|dx \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Für $0 > h \geq -\min\{\delta, x_0 - a\}$ erhält man analog

$$\begin{aligned} \Big|\frac{1}{h}\Big(F(x_0+h) - F(x_0)\Big) - f(x_0)\Big| &= \Big| -\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0} \Big(f(x) - f(x_0)\Big)dx\Big| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Also

$$\Big|\frac{1}{h}\Big(F(x_0+h) - F(x_0)\Big) - f(x_0)\Big| \leq \varepsilon \qquad \forall \quad 0 \leq |h| \leq \min\{\delta, x_0 - a, b - x_0\}$$

[12)] Bedeutsamer ist das Beispiel einer Funktion $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften: $\psi'(x)$ existiert für alle $x \in [0,1]$, ψ' ist beschränkt auf $[0,1]$ und ψ' ist unstetig auf einer Menge $E \subset [0,1]$ mit positivem Maß (ψ' ist somit nicht R-integrierbar auf $[0,1]$).

$\blacksquare$

Wir beweisen nun den wichtigen

1.1.17 Satz (**Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**) *Sei f R-integrierbar auf $[a,b]$. Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion für f auf $]a,b[$, d. h.*

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in]a,b[.$$

Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beweis Sei $\mathcal{Z} = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert die Existenz von Zahlen $\xi_k \in]x_{k-1}, x_k[$, so daß $F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ $(k = 1, \cdots, n)$. Wir erhalten

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \Big(F(x_k) - F(x_{k-1}) \Big) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

und

$$s(f, \mathcal{Z}) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, \mathcal{Z}).$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sup_{\mathcal{Z}' \in \{\mathcal{Z}\}} \{s(f; \mathcal{Z}')\} \\ &\leq F(b) - F(a) \\ &\leq \inf_{\mathcal{Z}'' \in \{\mathcal{Z}\}} \{S(f; \mathcal{Z}'')\} = \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

1.1.5 Eigenschaften des Integrals (II)

Vertauschung von Integration und Grenzübergang

Wir untersuchen nun das Problem, unter welchen Bedingungen für eine konvergente Folge $(f_n) \subset \mathcal{R}([a,b])$ die Vertauschung von Integration und Grenzübergang möglich ist, d. h. unter welchen Bedingungen die Gleichung

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

gilt.

$\boxed{\text{Beispiele}}$

$\boxed{1}$

Es gibt $f_n \in \mathcal{R}([a,b])$ $(n \in I\!N)$ *mit:*

1) $f_n(x) \to f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$,

2) $f \in \mathcal{R}([a,b])$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \neq \int\limits_a^b f(x)dx$

In der Tat, für $n \in I\!N$ sei

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0, \\ n & \text{für} \quad 0 < x < \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{für} \quad \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

und

$$f(x) := 0 \text{ für } x \in [0,1].$$

Dann gilt:

- $f_n(x) \to f(x) \qquad \forall\, x \in [0,1]$,
- $f \in \mathcal{R}([0,1])$,
- $\int\limits_0^1 f_n(x)dx = n \int\limits_0^{1/n} dx = 1$, also:

  $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int\limits_0^1 f(x)dx.$

Das Wachstum von $\max\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = n$ bewirkt, daß $(*)$ nicht gilt. Überdies sieht man, daß die Folge (f_n) *nicht gleichmäßig auf* $[0,1]$ *gegen* f *konvergiert.*

Das folgende Beispiel illustriert die mögliche Ungültigkeit von $(*)$ noch deutlicher. Für $n \in I\!N$ sei

$$\hat{f}_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0, \\ (-1)^n n^2 & \text{für} \quad 0 < x < \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{für} \quad \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Es gilt wieder $\hat{f}_n(x) \to 0$ für alle $x \in [0,1]$, jedoch

$$\int\limits_0^1 \hat{f}_{2n}(x)dx \to +\infty, \qquad \int\limits_0^1 \hat{f}_{2n+1}(x)dx \to -\infty. \qquad \blacksquare$$

Eine Folge R-integrierbarer Funktionen kann punktweise gegen eine Funktion konvergieren, die nicht R-integrierbar ist; genauer:

$\boxed{2}$ *es gibt* $f_n \in \mathcal{R}([a,b])\,(n \in I\!N)$ *mit:*

1) $f_n(x) \to f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$,

2) $|f_n(x)| \le C_0 = \text{const} \quad \forall\, n \in I\!N, \quad \forall\, x \in [a,b]$,

3) $f \notin \mathcal{R}([a,b])$.

Um ein Beispiel einer solchen Funktionenfolge zu konstruieren, bezeichne $\{r_1, r_2, \cdots\}$ die Menge der rationalen Zahlen, die zum Intervall $[0,1]$ gehören. Für $n \in I\!N$ und $x \in [0,1]$ sei

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \qquad x \in \{r_1, \cdots, r_n\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie oben bezeichne D die DIRICHLET-Funktion auf $[0,1]$, d. h.

$$D(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \quad \text{rational}, \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \quad \text{irrational}. \end{cases}$$

Wir erhalten:

- f_n *ist R-integrierbar auf* $[0,1]$ (denn f_n ist nur in den Punkten $r_1, \cdots, r_n$ unstetig, es gilt
$$\int_0^1 f_n(x)dx = 0 \text{)},$$
- $f_n(x) \to D(x) \qquad \forall\, x \in [0,1]$,
- $|f_n(x)| \le 1 \qquad \forall\, n \in I\!N, \qquad \forall\, x \in [0,1]$,
- $D \notin \mathcal{R}\,([0,1])$.

Die Funktionen f_n enthalten mit wachsendem n „immer mehr Unstetigkeitsstellen". Die Folge (f_n) *konvergiert nicht gleichmäßig auf* $[0,1]$ *gegen* D. Dies folgt aus

$$D(x) - f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in \{r_1, \cdots, r_n\} \quad \text{oder} \quad x \quad \text{irrational}, \\ 1 & \text{für} \quad x \notin \{r_1, \cdots, r_n\} \quad \text{und} \quad x \quad \text{rational}. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Diese Beispiele legen die Vermutung nahe, daß die gleichmäßige Konvergenz einer Folge R-integrierbarer Funktionen hinreichend für die R-Integrierbarkeit der Grenzfunktion und die Gültigkeit von $(*)$ ist. Der folgende Satz bestätigt dies.

Satz 1.1.18 *Seien* $f_n \in \mathcal{R}([a,b])\,(n \in I\!N)$. *Es gelte*

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig auf } [a,b] \text{ für } n \to \infty.$$

Dann gilt:

1. $f \in \mathcal{R}([a,b])$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$. Die gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$ auf $[a,b]$ bedeutet, daß ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in I\!N$ existiert, so daß

$$|f(x) - f_n(x)| \le \tfrac{\varepsilon}{b-a} \qquad \forall\, x \in [a,b],\ \forall\, n \ge n_0.$$

Insbesondere gilt

$$(*) \qquad f_{n_0}(x) - \frac{\varepsilon}{b-a} \le f(x) \le f_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \forall\, x \in [a,b].$$

Da f_{n_0} R-integrierbar ist, existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon = (x_{\varepsilon,0}, x_{\varepsilon,1} \cdots, x_{\varepsilon,m})$ von $[a,b]$, so daß $S(f_{n_0}, \mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f_{n_0}, \mathcal{Z}_\varepsilon) \le \varepsilon$. Aus $(*)$ folgt nun

$$m_k(f_{n_0}) - \tfrac{\varepsilon}{b-a} \le m_k(f) \le M_k(f) \le M_k(f_{n_0}) + \tfrac{\varepsilon}{b-a}$$

$(k = 1, \cdots, m)$. Multiplikation dieser Ungleichungen mit $x_{\varepsilon,k} - x_{\varepsilon,k-1}$ und anschließende Summation über $k = 1, \cdots, m$ liefern

$$s(f_{n_0}, \mathcal{Z}_\varepsilon) - \varepsilon \le s(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) \le S(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) \le S(f_{n_0}, \mathcal{Z}_\varepsilon) + \varepsilon,$$

also

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) &\le S(f_{n_0}, \mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) + 2\varepsilon \\ &\le 2\varepsilon + \varepsilon \\ &= 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Aus Folgerung 1.1.8 folgt nun die R-Integrierbarkeit von f auf $[a,b]$.

Eine abermalige Verwendung der gleichmäßigen Konvergenz $f_n \to f$ auf $[a,b]$ liefert

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \right| &= \left| \int\limits_a^b \Big(f_n(x) - f(x)\Big)dx \right| \\ &\le \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &\le \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n \ge n_0$. ■

Die gleichmäßige Konvergenz $f_n \to f$ auf dem Intervall $[a,b]$ ist jedoch *nicht notwendig* für die Gültigkeit der Aussagen 1. und 2. von Satz 1.1.18. Dies zeigen folgende Beispiele.

Beispiele

1 Für $n \in I\!N$ und $x \in [0,1]$ sei

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \sqrt{n} & \text{für } 0 < x < \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{für } \dfrac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Wir erhalten:

- $f_n(x) \to 0 \qquad \forall\, x \in [0,1]$,
- f_n *konvergiert nicht gleichmäßig auf* $[0,1]$ *gegen* $f \equiv 0$ (denn $\max\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sqrt{n}$),
- $\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0 = \int\limits_0^1 f(x)dx.$

$\boxed{2}$ Seien

$$\begin{aligned} f_n(x) &:= x^n, \quad n \in I\!N, \quad x \in [0,1] \\ f(x) &:= \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Für diese Funktionenfolge gilt:

- $f_n(x) \to f(x) \qquad \forall\, x \in [0,1]$,
- f_n *konvergiert nicht gleichmäßig auf* $[0,1]$ *gegen* f,
- $|f_n(x)| \le 1 \qquad \forall\, n \in I\!N,\ \forall\, x \in [0,1]$,
- $f \in \mathcal{R}\,([0,1])$,
- $\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \dfrac{1}{n+1} \to 0 = \int\limits_0^1 f(x)dx.$

Dieses Beispiel ist ein Spezialfall der Aussage des folgenden Satzes.

Satz (Arzelà (1885)) *Sei* (f_n) *eine Folge R-integrierbarer Funktionen auf dem Intervall* $[a,b]$*. Es gelte:*

1) $f_n(x) \to f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$,
2) $|f_n(x)| \le C_0 = \text{ const } \forall\, n \in I\!N, \quad \forall\, x \in [a,b]$,
3) $f \in \mathcal{R}\,([a,b])$.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx. \qquad \blacksquare$$

Partielle Integration

1.1.19 Satz *Für* $f, g \in C^1([a,b])$ *gilt*

$$\int\limits_a^b f'(x)\, g\,(x)dx = f(b)\, g\,(b) - f(a)\, g\,(a) - \int\limits_a^b f(x)\, g'\,(x)dx.$$

Beweis Die Funktion fg ist eine Stammfunktion der R-integrierbaren Funktion $f'g + fg'$ auf $[a,b]$. Satz 1.1.17 liefert

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b \Big(f'(x)\, g\,(x) + f(x)\, g'\,(x)\Big)dx &= \int\limits_a^b (fg)'\,(x)dx \\ &= f(b)\, g\,(b) - f(a)\, g\,(a). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Variablensubstitution

Die Berechnung des Integrals

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

kann vereinfacht werden, indem man die Substitution

$$x = \varphi(\tau), \qquad \tau \in [\alpha, \beta]$$

durchgeführt, wobei

$$\varphi \in C^1([\alpha, \beta]), \quad \varphi([\alpha, \beta]) = [a, b].$$

Nach Ausführung dieser Substitution wird die Integration über das Intervall $[\alpha, \beta]$ ausgeführt und gleichzeitig der Integrand von I verändert.

Wir skizzieren einen Zugang zur Transformation des Integrals I mittels der Substitution $x = \varphi(\tau)$ unter der zusätzlichen Voraussetzung der Injektivität von φ. Die Injektivität von φ impliziert, daß φ auf $[\alpha, \beta]$ streng monoton wächst oder streng monoton fällt.

Seien $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ beliebig gewählt. Dann existieren eindeutig bestimmte $\tau_1, \tau_2 \in [\alpha, \beta]$, so daß $\tau_1 < \tau_2$ und

$$x_1 = \varphi(\tau_1),\ x_2 = \varphi(\tau_2) \quad \text{falls} \quad \varphi \quad \text{streng monoton wächst,}$$

$$x_2 = \varphi(\tau_1),\ x_1 = \varphi(\tau_2) \quad \text{falls} \quad \varphi \quad \text{streng monoton fällt.}$$

Es folgt

$$x_2 - x_1 = \varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varphi'(\tau) d\tau$$

im ersten Fall, bzw.

$$x_2 - x_1 = \varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Big(- \varphi'(\tau) \Big) d\tau$$

im zweiten Fall. Beide Fälle können zusammengefaßt werden zu folgender Aussage:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx &= x_2 - x_1 \\ &= \text{Länge des Bildintervalls } \varphi([\tau_1, \tau_2]) \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\varphi'(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar eine analoge Formel für Funktionen f, die endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen disjunkter Teilintervalle von $[a, b]$ sind. Dies führt dann zu einer Substitutionsformel für integrierbare Funktionen $f \geq 0$ und schließlich für beliebige integrierbare Funktionen f auf $[a, b]$. Letzteres ist Inhalt des folgenden Satzes.

Satz *Sei $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$ mit*

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b] \qquad \textit{bijektiv.}$$

Dann gilt für jede auf $[a, b]$ R-integrierbare Funktion f:

1. *$f\circ\varphi|\varphi'|$ ist R-integrierbar auf $[\alpha,\beta]$;*

2. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\Big(\varphi(\tau)\Big)|\varphi'(\tau)|d\tau$ [13] ■

Wir zeigen, daß man eine ähnliche Aussage mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhalten kann.

1.1.20 Satz *Sei $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$ mit $\varphi\Big([\alpha,\beta]\Big) = [a,b]$ und $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ oder $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$. Sei f R-integrierbar auf $[a,b]$. Überdies gelte:*

1) *f besitzt eine Stammfunktion F auf $[a,b]$;*

2) *$f\circ\varphi$ ist R-integrierbar auf $[\alpha,\beta]$.*

Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_\alpha^\beta f\Big(\varphi(\tau)\Big)\varphi'(\tau)d\tau & \textit{falls} \quad \varphi(\alpha) = a,\, \varphi(\beta) = b, \\[2ex] \displaystyle-\int\limits_\alpha^\beta f\Big(\varphi(\tau)\Big)\varphi'(\tau)d\tau & \textit{falls} \quad \varphi(\alpha) = b, \varphi(\beta) = a. \end{cases}$$

Beweis Wegen

$$(F\circ\varphi)' = F'(\varphi)\varphi' = f(\varphi)\varphi'$$

ist $F\circ\varphi$ eine Stammfunktion für $f(\varphi)\varphi'$ auf $[\alpha,\beta]$. Satz 1.1.17 ergibt

$$\int\limits_\alpha^\beta f\Big(\varphi(\tau)\Big)\varphi'(\tau)d\tau = F\Big(\varphi(\beta)\Big) - F\Big(\varphi(\alpha)\Big).$$

Falls $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ gilt, so erhält man andererseits mit Hilfe von Satz 1.1.17

$$F\Big(\varphi(\beta)\Big) - F\Big(\varphi(\alpha)\Big) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Falls jedoch $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$ gilt, so folgt

$$F\Big(\varphi(\beta)\Big) - F\Big(\varphi(\alpha)\Big) = F(a) - F(b) = -\int\limits_a^b f(x)dx. \quad ■$$

Bemerkung. Sei φ überdies *monoton* auf $[\alpha,\beta]$. Dann kann die Behauptung von Satz 1.1.20 in der Formel

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\Big(\varphi(\tau)\Big)|\varphi'(\tau)|d\tau \qquad (+)$$

zusammengefaßt werden.

Sei nun außerdem $f \geq 0$ auf $[a,b]$. Die Zahl

[13] Vgl. z.B. Hildebrandt, S.: *Analysis 1.* Springer-Verlag, Berlin 2002; S. 308-309, sowie Walter, W.: *Analysis* II. 2. Aufl., Springer-Verlag Berlin 1991; S. 248.

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$$

ist der Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen $\{(x, f(x))|x \in [a,b]\}$. Die Formel (+) zeigt, wie dieser Flächeninhalt nach Durchführung der Substitution $x = \varphi(\tau), \tau \in [\alpha, \beta]$ berechnet wird. ■

Beispiele

1 $\alpha = 0,\ \beta > 0;\ a = 0;\ b = \beta;\ \varphi(\tau) := \beta - \tau,\ \tau \in [0, \beta]$. φ ist eine Bijektion von $[0, \beta]$ auf $[0, \beta]$; $\varphi'(\tau) = -1$ für alle $\tau \in [0, \beta]$. Satz 1.1.20 liefert für jede auf $[a, b]$ R-integrierbare Funktion f:

$$\int\limits_0^\beta f(x)dx = -\int\limits_0^\beta f(\beta - \tau)(-1)d\tau = \int_0^\beta f(\beta - \tau)d\tau.$$

2 Sei $a > 0$. Für jede auf $[-a, 0]$ R-integrierbare Funktion f gilt

$$\int\limits_{-a}^0 f(x)dx = \int\limits_0^a f(-\tau)d\tau.$$

In der Tat, sei $b = 0$. Die Substitution $x = -\tau,\ \tau \in [0, a]$ (also: $\varphi(\tau) = -\tau,\ \tau \in [0, a]$) liefert: $\varphi'(\tau) = -1$ für alle $\tau \in [0, a],\ \varphi(0) = 0 = b, \varphi(a) = -a$. Das ergibt

$$\int\limits_{-a}^0 f(x)dx = -\int\limits_0^a f(-\tau)(-1)d\tau = \int_0^a f(-\tau)d\tau.$$

Sei f auf $[-a, a]$ R-integrierbar und ungerade: $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-a}^a f(x)dx &= \int\limits_{-a}^0 f(x)dx + \int\limits_0^a f(x)dx \\
&= -\int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_0^a f(x)dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3 $\alpha = -1,\ \beta = 1;\ a = 0,\ b = 1;\ \varphi(\tau) = \tau^2,\ \tau \in [-1, 1]$. Es gilt: $\varphi([-1, 1]) = [0, 1], \varphi(-1) = 1 = \varphi(1),\ \varphi'(\tau) = 2\tau$ für alle $\tau \in [-1, 1]$. Aus Satz 1.1.20 folgt, daß für jede auf $[0, 1]$ integrierbare Funktion gilt:

$$\int\limits_1^1 f(x)dx = 2\int\limits_{-1}^1 f(\tau^2)\tau d\tau$$

$\Big[$ unabhängig hiervon gilt: $\displaystyle\int\limits_1^1 f(x)dx = 0 = \int\limits_{-1}^1 f(\tau^2)\tau d\tau\Big]$. ■

Mittelwertsätze

1.1.21 Satz *Seien f, g R-integrierbar auf $[a, b]$. Es gelte*

$$g(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in [a, b] \qquad (\textit{oder } g(x) \leq 0 \qquad \forall\, x \in [a, b]).$$

Dann existiert ein $\mu \in \left[\inf\limits_{t\in[a,b]} f(t),\ \sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)\right]$, *so daß*

$$\int\limits_a^b f(x)\, g\,(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Wenn $f \in C\Big([a, b]\Big)$, *so existiert ein* $\xi \in [a, b]$ *mit*

$$\int\limits_a^b f(x)\, g\,(x)dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Beweis (für $g \geq 0$). Es gilt

$$\left(\inf_{t\in[a,b]} f(t)\right) g(x) \leq f(x)\, g\,(x) \leq \left(\sup_{t\in[a,b]} f(t)\right) g(x) \qquad \forall x \in [a, b]$$

Hieraus folgt

$$\left(\inf_{t\in[a,b]} f(t)\right) \int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)\, g\,(x)dx \leq \left(\sup_{t\in[a,b]} f(t)\right) \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Falls $\displaystyle\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, so gilt die erste Behauptung des Satzes für jedes $\mu \in I\!R$.

Sei $\displaystyle\int\limits_a^b g(x)dx > 0$. Dann gilt diese Behauptung für

$$\mu := \frac{\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\, g(x)dx}{\displaystyle\int\limits_a^b g(x)dx}.$$

Wenn $f \in C\Big([a, b]\Big)$, so liefert der Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \mu$. ■

1.1.22 Satz (Bonnet[14)]) *Seien f, g R-integrierbar auf $[a, b]$. Es gelte*

[14)] Pierre Ossian Bonnet (1819 - 1892), französischer Mathematiker und Astronom.

$g(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$,

g monoton fallend (oder monoton wachsend).

Dann existiert ein $\xi \in]\, a, b\, [$ *, so daß*

$$\int_a^b f(x)\, g\,(x) dx = g(a) \int_a^\xi f(x) dx$$

$$\left(\text{oder } \int_a^b f(x)\, g\,(x) dx = g(b) \int_\xi^b f(x) dx \right). \qquad \blacksquare$$

1.2 Uneigentliche Integrale

1.3 Kurven in $\mathbb{R}^N$. Kurvenintegral

1.3.1 Weg und Kurve

1.3.1 Definition *1. Eine stetige Abbildung* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *heißt* **Weg**. *Bezeichnung:*

$$\gamma(t) = \Big(\gamma_1(t), \cdots, \gamma_N(t) \Big), \qquad t \in [a,b].$$

Eine Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *heißt* **Weg der Klasse** C^k $(k \in \mathbb{N})$*, wenn*

$$\gamma_i \in C^k\Big([a,b] \Big) \qquad (i = 1, \cdots, N).$$

2. Eine Punktmenge $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ *heißt* **Kurve**, *wenn ein Weg* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ *existiert, so daß*

$$\Gamma = \gamma\Big([a,b] \Big).$$

Γ *heißt die von dem Weg* γ *erzeugte Kurve. Das Paar* $(\gamma, [a,b])$ *heißt* **Parameterdarstellung von** Γ.

Die Begriffsbildungen "Kurve" und "Parameterdarstellung einer Kurve" werden wir in Abschn. 1.3.3 genauer studieren.

Unsere in Definition 1.3.1 eingeführten Begriffe sollen zum Ausdruck bringen, daß eine Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ eine Punktmenge ist, die Bildmenge verschiedener Wege γ sein kann. Die Abbildung γ beinhaltet, mit welcher Durchlaufungsrichtung die Kurve Γ "abgeschritten" ("durchlaufen") wird und welche "Weglänge" dabei entsteht; es ist möglich, daß Teile einer Kurve Γ (oder ganz Γ) mehrfach "durchlaufen" werden.

$\boxed{\text{Beispiele}}$

$\boxed{1}$ *Einheitskreislinie:*

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

1.1. Für

$$\gamma(t) := (\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

gilt:

$$\Gamma = \gamma\Big([0, 2k\pi]\Big) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Wenn t das Intervall $[0, 2k\pi]$ (von 0 nach $2k\pi$) "durchläuft", so "durchläuft" $\gamma(t)$ die Menge Γ k-mal entgegen dem Uhrzeigersinn.

Es gilt:

$$\gamma : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \textit{ ist injektiv }, \gamma(0) = \gamma(2\pi).$$

1.2 Für

$$\begin{aligned}
\gamma_1(x) &:= \Big(x, +\sqrt{1-x^2}\Big), \quad x \in [-1, 1] \\
\gamma_2(x) &:= \Big(x, -\sqrt{1-x^2}\Big), \quad x \in [-1, 1]
\end{aligned}$$

gilt:

$$\Gamma = \gamma_1\Big([-1, 1]\Big) \cup \gamma_2\Big([-1, 1]\Big).$$

$\boxed{2}$ *Parabelbogen:*

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = x^2, x \in [1, 2]\right\}.$$

Für

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &:= (t, t^2), \quad t \in [1, 2] \\
\delta(t) &:= (e^t, e^{2t}), \quad t \in [0, \log 2]
\end{aligned}$$

gilt:

$$\Gamma = \gamma\Big([1, 2]\Big) = \delta\Big([0, \log 2]\Big).$$

$\boxed{3}$ Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit:

- f ist monoton wachsend auf $\mathbb{R}$,
- $f(t) = 0 \quad \forall t \leq 0, \quad f(t) > 0 \quad \forall t > 0.$

Sei

$$\gamma(t) := \Big(f(t), f(-t)\Big), \quad t \in [-1, 1].$$

Dann ist γ ein Weg der Klasse C^1. Die Kurve

$$\Gamma = \gamma\Big([-1,1]\Big)$$

hat einen "Knick" in $t = 0$, es gilt: $\gamma'(0) = (0,0)$.

$\boxed{4}$ *Weg in Polarkoordinaten.* Sei $f \in C([a,b])$ gegeben. Dann ist

$$\gamma(t) := (f(t)\cos t,\ f(t)\sin t),\ \ t \in [a,b]$$

ein Weg mit einer Darstellung in Polarkoordinaten. ■

1.3.2 Definition *1. Eine stetige injektive Abbildung $\gamma : [a,b] \to I\!R^N$ heißt* JORDAN-**Weg**[15]*.*

Eine Abbildung $\gamma : [a,b] \to I\!R^N$ heißt **geschlossener** JORDAN-**Weg***, wenn*

$$\begin{cases} \gamma \text{ ist stetig auf } [a,b], \\ \\ \gamma \text{ ist injektiv auf } [a,b[, \\ \\ \gamma(a) = \gamma(b). \end{cases}$$

2. Eine Punktmenge $\Gamma \subset I\!R^N$ heißt JORDAN-**Kurve** [**geschlossene** JORDAN-**Kurve**], *wenn ein* JORDAN-*Weg* [*geschlossener* JORDAN-*Weg*] $\gamma : [a,b] \to I\!R^N$ *existiert, so daß*

$$\Gamma = \gamma\Big([a,b]\Big).$$

Beispiel 1.1 zeigt, daß eine JORDAN-Kurve Parameterdarstellungen besitzen kann, die keine JORDAN-Wege sind. ■

1.3.2 Rektifizierbare Wege

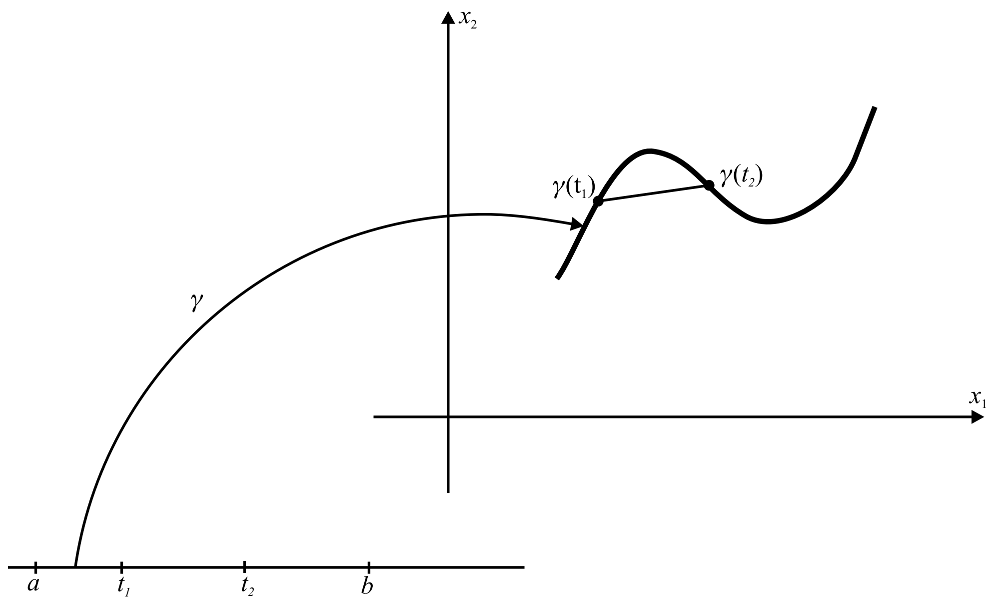
Sei $\gamma : [a,b] \to I\!R^N$ ein Weg. Sei $\Gamma \subset I\!R^N$ die von γ erzeugte Kurve: $\Gamma = \gamma\Big([a,b]\Big)$. Für Punkte $P_1, P_2 \in \Gamma$ kann man schreiben

$$P_1 = \gamma(t_1), \quad P_2 = \gamma(t_2) \quad (t_1, t_2 \in [a,b]).$$

Der EUKLIDische Abstand zwischen P_1 und P_2 ist

$$\overline{P_1P_2} = \Big\|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\Big\|.$$

[15] D.h. $\gamma\big([a,b]\big)$ ist "doppelpunktfrei".



Um die Länge des Weges γ zu definieren, betrachten wir eine Zerlegung $\mathcal{Z} = (t_0, t_1, \cdots t_m)$ ($a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$) des Intervalls $[a, b]$. Dann ist

$$L(\gamma; \mathcal{Z}) := \sum_{k=1}^{m} \left\| \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \right\|$$

die Länge des Streckenzuges, der die Punkte $\gamma(t_k) \in \Gamma$ ($k = 0, 1, \cdots, m$) verbindet. Die Zahl $L(\gamma; \mathcal{Z})$ ist eine Näherung für die Länge des Weges γ.

Ist $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung der Zerlegung $\mathcal{Z}$, so gilt

$$L(\gamma; \mathcal{Z}) \leq L(\gamma; \mathcal{Z}').$$

Diese Eigenschaft führt zu

1.3.3 Definition *1. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ ein Weg.*

$$L(\gamma) := \sup \left\{ L(\gamma; \mathcal{Z}) \,\middle|\, \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } [a, b] \right\}$$

heißt **Länge des Weges** γ.

Wenn

$$L(\gamma) < +\infty,$$

so heißt γ **rektifizierbar.**

2. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ eine JORDAN*-Kurve. Sei $(\gamma, [a, b])$ eine Parameterdarstellung von Γ durch einen* JORDAN*-Weg γ. Wenn $L(\gamma) < +\infty$, so heißt Γ* **rektifizierbar.**

Die Zahl

$$L(\Gamma) := L(\gamma)$$

heißt **Länge von** Γ.

Im folgenden Abschnitt zeigen wir, daß der soeben eingeführte Begriff "Länge einer Kurve Γ" geometrisch korrekt formuliert ist: $L(\Gamma)$ ist invariant beim Übergang von einer Parameterdarstellung von Γ durch einen JORDAN-Weg zu einer äquivalenten Parameterdarstellung von Γ durch einen anderen JORDAN-Weg; überdies ist $L(\Gamma)$ unabhängig von der (noch zu definierenden) Orientierung von Γ. ■

Der folgende Satz besagt, daß Wege der Klasse C^1 rektifizierbar sind. Genauer:

1.3.4 Satz *Sei $\gamma : [a,b] \to R^N$ ein Weg der Klasse C^1. Dann gilt*

$$L(\gamma) = \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt.$$

Beweis Sei $\mathcal{Z} = (t_0, t_1, \cdots, t_m)$ eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt

$$\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma_j'(s) ds$$

$(j = 1, \cdots, N;\ k = 1, \cdots, m)$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} L(\gamma; \mathcal{Z}) &= \sum_{k=1}^m \left\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\right\| = \sum_{k=1}^m \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(s) ds \right\| \\ &\le \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|\gamma'(s)\right\| ds \\ &= \int_a^b \left\|\gamma'(s)\right\| ds. \end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \sup\left\{ L(\gamma; \mathcal{Z}) \,\middle|\, \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } [a,b] \right\} \\ &\le \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt. \end{aligned}$$

Wir beweisen die entgegengesetzte Richtung dieser Ungleichung. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von γ_j auf $[a,b]$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\left|\gamma_j'(s) - \gamma_j'(t)\right| \le \frac{\varepsilon}{(b-a)\sqrt{N}} \qquad \forall\, s, t \in [a,b] \text{ mit } |s - t| \le \delta$$

$(j = 1, \cdots, N)$.

Sei $\mathcal{Z} = (t_0, t_1, \cdots, t_m)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $|\mathcal{Z}| \leq \delta$. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung sichert die Existenz von Punkten $\xi_{j,k} \in [t_{k-1}, t_k]$, so daß

$$\frac{\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = \gamma_j'(\xi_{j,k})$$

$(k = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, N)$. Für alle $s \in [t_{k-1}, t_k]$ gilt daher

$$\begin{aligned}
&\left\| \gamma'(s) - \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N} \Big(\gamma_j'(s) - \gamma_j'(\xi_{j,k}) \Big)^2 \\
&\leq \left(\frac{\varepsilon}{b-a} \right)^2 \qquad (k = 1, \cdots, m).
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_a^b \Big\| \gamma'(s) \Big\| ds &= \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Big\| \gamma'(s) \Big\| \, ds \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| \gamma'(s) - \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\| ds + \sum_{k=1}^{m} \Big\| \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \Big\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt + L(\gamma) \\
&= \varepsilon + L(\gamma).
\end{aligned}$$

Das ergibt

$$\int_a^b \Big\| \gamma'(s) \Big\| ds \leq L(\gamma). \qquad \blacksquare$$

Wir betrachten zwei Spezialfälle für die Berechnung der Länge eines C^1-Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

1. *Nichtparametrische Darstellung eines Weges.* Sei $f \in C^1\Big([a,b]\Big)$. Dann ist

$$\gamma : t \to \gamma(t) := (t, f(t)),\ \ t \in [a,b]$$

ein Weg der Klasse C^1. Wir erhalten

$$L(\gamma) = \int_a^b \Big\| \gamma'(t) \Big\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + \Big(f'(t)\Big)^2} dt.$$

2. *Weg in Polarkoordinaten* (vgl. 1.3.1, Beispiel 4):
Sei $f \in C^1\Big([a,b]\Big)$. Dann ist

$$\gamma : t \to \gamma(t) := \Big(f(t)\cos t,\ f(t)\sin t\Big);\ t \in [a,b]$$

ein Weg der Klasse C^1. Es gilt

$$\Big\|\gamma'(t)\Big\|^2 \quad = \quad \Big(f'(t)\cos t - f(t)\sin t\Big)^2 + \Big(f'(t)\sin t + f(t)\cos t\Big)^2 = f^2(t) + f'^2(t)$$

und daher

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)}dt. \qquad \blacksquare$$

Beispiele I

1 *Beispiel eines* JORDAN-*Weges* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *mit*

$$L(\gamma) = +\infty^{16)}.$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit:

- f ist 2-periodisch (d.h. $f(t+2k) = f(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, k \in \mathbb{N}$).
- $\Big|f(t)\Big| \leq 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$,
- $f(0) = 0,\ f(1) = 1$.

Sei

$$\gamma(t) := \begin{cases} (0,0) & \text{für } t = 0, \\ \Big(t, t^2 f\Big(\frac{1}{t^2}\Big)\Big) & \text{für } t \in]0,1]. \end{cases}$$

Die Abbildung γ ist stetig und injektiv auf $[0,1]$. Für

$$s_k := \frac{1}{\sqrt{2k+1}}, \quad t_k := \frac{1}{\sqrt{2k}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

gilt

$$f\left(\frac{1}{s_k^2}\right) \quad = \quad f(2k+1) \quad = \quad f(1) = 1,$$

$$f\left(\frac{1}{t_k^2}\right) \quad = \quad f(2k) \quad = \quad f(0) = 0,$$

und daher

16) Vgl. auch WALTER, W.: *Analysis* II. 2. Aufl.; Springer-Verlag, Berlin 1991; Beispiel auf S. 167. Eine geringfügig modifizierte Version dieses Beispiels ist diskutiert in AMANN, H.; ESCHER, J. : *Analysis* II. Birkhäuser 1999; Bemerkung 1.2 (a) auf S. 290.

$$
\begin{aligned}
\gamma(s_k) &= \left(s_k, s_k^2\, f\left(\frac{1}{s_k}\right)\right) &= \left(s_k, s_k^2\right),\\
\gamma(t_k) &= \left(t_k, t_k^2\, f\left(\frac{1}{t_k}\right)\right) &= \left(t_k,\, 0\right).
\end{aligned}
$$

Für die Zerlegung $\mathcal{Z}_n =: (\tau_0, \tau_1, \cdots, \tau_{2n+1})$ von $[0,1]$, wobei

$$
\tau_0 := 0, \qquad \tau_j := \frac{1}{\sqrt{2(n+1)-j}} \quad (j = 1, \cdots, 2n), \quad \tau_{2n+1} := 1
$$

gilt dann

$$
\begin{aligned}
L(\gamma; \mathcal{Z}_n) &= \sum_{j=1}^{2n+1} \Big\| \gamma(\tau_j) - \gamma(\tau_{j-1}) \Big\| \\
&= \|\gamma(s_n) - \gamma(0)\| + \|\gamma(t_n) - \gamma(s_n)\| + \cdots + \|\gamma(t_1) - \gamma(s_1)\| + \|\gamma(1) - \gamma(t_1)\| \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \Big\| \gamma(t_k) - \gamma(s_k) \Big\| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big((t_k - s_k)^2 + (0 - s_k^2)^2 \Big)^{1/2} \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} s_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} \to +\infty \text{ für } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

$\boxed{2}$ *Beispiel einer* **geschlossenen** JORDAN-*Kurve*, die durch einen nirgends differenzierbaren Weg erzeugt wird: *die* v. KOCHsche *Kurve* [17].

$\boxed{\text{Beispiele II}}$

$\boxed{1}$ *Logarithmische Spirale.* Mit $r = f(t) = e^{\alpha t}$ ($t \in [a,b]$, $\alpha = \text{const} > 0$ fixiert) definieren wir

$$
\gamma(t) := \left(e^{\alpha t} \cos t, e^{\alpha t} \sin t\right), \; t \in [a,b].
$$

Es gilt

$$
|\,\gamma(t)\,|^2 = e^{2\alpha t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{2\alpha t},
$$

also

$$
ln|\,\gamma(t)\,| = \alpha t
$$

(dies motiviert die Bezeichnung "Logarithmische Spirale" für $\gamma([a,b])$).

Wegen

$$
\|\,\gamma'(t)\,\|^2 = e^{2\alpha t}(\alpha^2 + 1), \; t \in [a,b]
$$

[17] ...

erhalten wir

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{\alpha^2+1}\int_a^b e^{\alpha t} dt \\ &= \sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2}}\left(e^{\alpha b}-e^{\alpha a}\right). \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ *Umfang einer Ellipse.* Für fixierte Zahlen $a > 0$, $b > 0$ betrachten wir die Ellipse

$$\Gamma := \left\{ (x_1, x_2) \in I\!R^2 \middle| \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \right\}$$

Wir setzen

$$\gamma(t) := (a\cos t, b\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Dann ist $\Gamma = \gamma\Big([0, 2\pi]\Big)$. Wegen $\gamma'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$ folgt

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\ dt.$$

Sei $a > b$. Mit $k^2 := 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$ kann man $L(\gamma)$ in der folgenden Form schreiben:

$$L(\gamma) = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - k^2\cos^2 t}\ dt.$$

Dies ist ein *elliptisches Integral*; es kann nicht mit Hilfe einer Stammfunktion in geschlossener Form ausgewertet werden. ■

1.3.3 Äquivalenzklassen

Sei $\Gamma \subset I\!R^N$ eine JORDAN-Kurve. Seien $(\gamma, [a, b])$ und $(\delta, [c, d])$ Parametrisierungen von Γ durch JORDAN-Wege:

$$\Gamma = \gamma([a, b]) = \delta([c, d]).$$

Die Funktion $\gamma^{-1} \circ \delta : [c, d] \to [a, b]$ ist bijektiv und stetig; sie ist daher entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Setzt man

$$h := \gamma^{-1} \circ \delta,$$

so gilt

$$\delta = \gamma \circ h \qquad \text{bzw.} \qquad \gamma = \delta \circ h^{-1}.$$

Die Funktion h "vollzieht" den Übergang von der Parameterdarstellung $(\delta, [c, d])$ zur Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$ ("Umparametrisierung", "Einführung eines neuen Parameters").

Dies gibt Anlaß zu folgender

1.3.5 Definition *Sei* $\Gamma \subset I\!R^N$ *eine* JORDAN-*Kurve. Zwei Parameterdarstellungen von* Γ *durch* JORDAN-*Wege* $(\gamma, [a,b])$ *und* $(\delta, [c,d])$ *heißen* **äquivalent**, *wenn eine streng monoton wachsende, surjektive und stetige Funktion* $h : [c,d] \to [a,b]$ *existiert, so daß*

$$\delta = \gamma \circ h.$$

Bezeichnung: $\gamma \sim \delta$.

Die Beziehung "$\sim$" ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller Parameterdarstellungen von Γ durch JORDAN-Wege. In der Tat, es gilt:

1. $\gamma \sim \gamma$,
2. $\gamma \sim \delta \Rightarrow \delta \sim \gamma$,
3. $\gamma \sim \delta,\ \delta \sim \xi \Rightarrow \gamma \sim \xi$.

Daher zerfällt die Menge aller Parameterdarstellungen von Γ durch JORDAN-Wege in disjunkte Äquivalenzklassen: $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \cdots$.

Seien $\gamma \in \mathcal{K}_1$ und $\delta \in \mathcal{K}_2$, d. h. $\gamma \not\sim \delta$. Daher ist die Funktion $h := \gamma^{-1} \circ \delta$ streng monoton fallend, surjektiv und stetig. Sei nun $\xi \notin \mathcal{K}_1$, d. h. $\gamma \not\sim \xi$. Also ist $g := \gamma^{-1} \circ \xi$ streng monoton fallend, surjektiv und stetig. Die Funktion $h^{-1} \circ g$ ist surjektiv und stetig. Da h^{-1} (ebenso wie h) streng monoton fallend ist, gilt

$$\tau_1 < \tau_2 \ \Rightarrow\ g(\tau_1) > g(\tau_2) \ \Rightarrow\ h^{-1}(g(\tau_1)) < h^{-1}(g(\tau_2)),$$

d.h. $h^{-1} \circ g$ ist streng monoton wachsend. Wegen

$$\gamma = \delta \circ h^{-1}, \qquad \xi = \gamma \circ g$$

folgt

$$\xi = (\delta \circ h^{-1}) \circ g = \delta \circ (h^{-1} \circ g).$$

Das bedeutet: $\xi \in \mathcal{K}_2$.

Mit Hilfe einer analogen Argumentation folgt: Wenn $\xi \notin \mathcal{K}_2$, so $\xi \in \mathcal{K}_1$. Wir nehmen nun an, daß es eine dritte nichtleere Äquivalenzklasse gibt: $\mathcal{K}_3 \neq \phi$. Für $\chi \in \mathcal{K}_3$ gilt dann $\chi \notin \mathcal{K}_1$ und $\chi \notin \mathcal{K}_2$. Im ersten Fall folgt $\chi \in \mathcal{K}_2$, im zweiten Fall $\chi \in \mathcal{K}_1$, d. h. in beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch. Also muß gelten: $\mathcal{K}_3 = \phi$.

Wir erhalten:

> *Es gibt genau zwei (disjunkte) Äquivalenzklassen* $\mathcal{K}$ *und* $\mathcal{K}'$ *von Parameterdarstellungen von* Γ *durch* JORDAN-*Wege.*

Sei $\gamma \in \mathcal{K}$, d. h. $\Gamma = \gamma([a,b])$ mit einem JORDAN-Weg γ. Wir definieren für $t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} h(t) &:= a + b - t, \\ \delta(t) &:= \gamma(h(t)) = \gamma(a + b - t). \end{aligned}$$

Die Funktion h ist streng monoton fallend auf $[a,b]$, surjektiv von $[a,b]$ auf $[a,b]$ und stetig. Also gilt $\gamma \not\sim \delta$, d. h. $\delta \in \mathcal{K}'$. Diese Argumentation kann umgekehrt werden. Daher gilt:

> *$\mathcal{K}'$ besteht aus den äquivalenten Parameterdarstellungen von Γ, die zu den Parameterdarstellungen aus $\mathcal{K}$ die entgegensgesetzte "Durchlaufung" von Γ definieren.*

1.3.6 Definition *Sei $\Gamma \subset I\!R^N$ eine* JORDAN-*Kurve. Sei $\mathcal{K}$ eine Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen von Γ durch* JORDAN-*Wege.*

Das Paar $(\Gamma, \mathcal{K})$ heißt **orientierte** JORDAN-*Kurve.*

Der in dieser Definition formulierte mathematische Begriff kann auch wie folgt zum Ausdruck gebracht werden:

Eine orientierte Kurve ist eine Äquivalenzklasse von Parameterdarstellungen einer Punktmenge $\Gamma \subset I\!R^N$.

Der folgende Satz besagt, daß der oben eingeführte Begriff der Länge einer JORDAN-Kurve korrekt formuliert ist.

1.3.7 Satz *Sei $\Gamma \subset I\!R^N$ eine* JORDAN-*Kurve. Seien $(\gamma,[a,b])$ und $(\delta,[c,d])$ zwei Parameterdarstellungen von Γ durch* JORDAN-*Wege.*

Dann gilt

$$\sup\left\{L(\gamma;\mathcal{Y})\,\middle|\,\mathcal{Y} \;\textit{ ist Zerlegung von } [a,b]\right\} = \sup\left\{L(\delta;\mathcal{Z})\,\middle|\,\mathcal{Z} \;\textit{ ist Zerlegung von } [c,d]\right\}$$

wenn

$$\gamma, \delta \in \mathcal{K} \qquad \textit{oder} \qquad \gamma \in \mathcal{K}, \quad \delta \in \mathcal{K}'$$

Dieser Satz beinhaltet die Invarianz der Kurvenlänge bei Übergang von einer Parameterdarstellung zu einer äquivalenten Parameterdarstellung (d. h. $\gamma, \delta \in \mathcal{K}$) oder bei Übergang von einer Parameterdarstellung zu einer Parameterdarstellung, die die entgegengesetzte Orientierung definiert (d. h. $\gamma \in \mathcal{K}$, $\delta \in \mathcal{K}'$).

1.3.4 Kurvenintegral

Für N-tupel $x = (x_1, \cdots, x_N)$, $y = (y_1, \cdots, y_N)$ aus $I\!R^N$ bezeichnen

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{N} x_i y_i, \qquad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2}$$

des EUKLIDische Skalarprodukt und die EUKLIDische Norm.

Sei $\Gamma \subset I\!R^N$ eine rektifizierbare JORDAN-Kurve, und sei $(\gamma,[a,b])$ eine Parameterdarstellung von Γ durch einen JORDAN-Weg. Sei $f : \Gamma \to I\!R^N$ eine beschränkte Funktion. Für

Zerlegungen $\mathcal{Z} = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ von $[a,b]$ und n-tupel $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ von Zwischenpunkten für $\mathcal{Z}$ ($\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \cdots, n$) betrachten wir die Integralsumme

$$\sigma(\Gamma, f; \mathcal{Z}, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\xi_k)) \cdot (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})).$$

Für $N = 1$ und $\gamma = id$ geht diese Summe über in die in Abschn. 1.1 betrachteten RIEMANNschen Integralsummen.

Es gilt nun

1.3.8 Lemma *Sei $f : \Gamma \to \mathbb{R}^N$ stetig. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß:*

für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[a,b]$ mit $\|\mathcal{Z}\| \le \delta$

für jede Verfeinerung $\mathcal{Z}'$ von $\mathcal{Z}$,

für alle n-tupel ξ, ξ' von Zwischenpunkten für $\mathcal{Z}$ bzw. $\mathcal{Z}'$

gilt:

$$\left| \sigma(\Gamma, f; \mathcal{Z}, \xi) - \sigma(\Gamma, f; \mathcal{Z}', \xi') \right| \le \varepsilon.$$

Sei $(\mathcal{Z}^{(m)})$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim\limits_{m\to 0} \|\mathcal{Z}^{(m)}\| = 0$. Aus Lemma 1.3.8 folgt: für jede Folge $(\xi^{(m)})$ von Zwischenpunkten für $\mathcal{Z}^{(m)}$ ist

$$\left(\sigma(\Gamma, f; \mathcal{Z}^{(m)}, \xi^{(m)})\right)$$

CAUCHY-Folge in $\mathbb{R}$. Wir setzen:

$$I := \lim_{m\to\infty} \sigma(\Gamma, f; \mathcal{Z}^{(m)}, \xi^{(m)}).$$

Die Definition der Zahl I ist im folgenden Sinne korrekt.

1.3.9 Lemma *Es gilt:*

1. *I ist unabhängig von der Wahl der Folge $(\xi^{(m)})$ der Zwischenpunkte für $\mathcal{Z}^{(m)}$.*
2. *I ist unabhängig von der Folge $(\mathcal{Z}^{(m)})$ von Zerlegung von $[a,b]$ mit $\lim\limits_{m\to\infty} \|\mathcal{Z}^{(m)}\| = 0$.*
3. *I ändert sich nicht bei Übergang von $(\gamma, [a,b])$ zu einer äquivalenten Parameterdarstellung $(\delta, [c,d])$ von Γ.*

Lemma 1.3.9 ermöglicht die folgende

1.3.10 Definition *Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ eine rektifizierbare JORDAN-Kurve. Sei $f : \Gamma \to \mathbb{R}^N$ stetig. Dann heißt*

$$\int_\Gamma f ds := \lim_{\substack{\|\mathcal{Z}\|\to 0 \\ \xi \text{ bel. Zwischenpunkte}}} \sigma(\Gamma, f; \mathcal{Z}, \xi).$$

Kurvenintegral *von* f *bezüglich* Γ.

Für die Berechnung des Kurvenintegrals dient

1.3.11 Satz *Sei* $\Gamma \subset I\!R^N$ *eine* JORDAN *-Kurve mit einer Parameterdarstellung* $(\gamma, [a, b])$ *durch einen* JORDAN*-Weg der Klasse* C^1.

Sei $f : \Gamma \to I\!R^N$ *stetig. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt.$$

Dieser Satz enthält Satz 1.3.4 im folgenden Sinne als Spezialfall:

$$\sup_{|f|\le 1} \int_\Gamma f\,ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = L(\Gamma).$$

Literaturverzeichnis

[1] ASCOLI, G.: *Sul concetto di integrale definito.* Atti R. Accad. Lincei, serie seconda, vol. II (1875); parte seconda - memorie; S. 862-872.

[2] CAUCHY, A.-L.:*Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. 1re Partie: Analyse Algébrique.*
1) Imprimerie Royale, Paris 1821.
2) Wiederabgedruckt in: *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy.* 2e *série: Ouvrages classiques; tome 3.* Gauthier-Villars, Paris 1897.
[**alle Seitenangaben beziehen sich auf diese Werkausgabe**].
3) Separat wiederabgedruckt und mit umfangreicher Einleitung herausgegeben von U. Bottazzini; Editrice CLUEB Bologna 1992.
4) Dt. Übers.: *Algebraische Analysis von Augustin Louis Cauchy* Hrsg. u. Übers.: C. Itzigsohn. Julius Springer, Berlin 1885.

[3] ———, *Résumé des Leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal.* Imprimerie Royal, Paris 1823.
Wiederabgedruckt in:
Œuvres complètes d'Augustin Cauchy. 2 *série: Ouvrages classiques; tome 4.* Gauthier-Villars, Paris 1899
[**alle Seitenangaben beziehen sich auf diese Werkausgabe**].

[4] DARBOUX, G.: *Mémoire sur les fonctions discontinues.* Ann. Scie. l'École Norm. Sup. 4 (1875), 57-112.

[5] DINI, U.: *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali.*
1) Tipograf. Nistri, Pisa 1878.
2) Wiederabgedruckt: Un. Mat. Ital., Firenze 1990.
3) Dt. Übers.: *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Größe.* Hrsg. u. Übers.: J. Lüroth u. A. Schepp. Teubner-Verlag, Leipzig 1892.

[6] Dirichlet, P.G. L.: *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent á représenter une fonction arbitraire entre des limite donées.* J. reine angew. Math. (Crelle's Journal) 4 (1829), 157-169.

[7] Du Bois-Reymond, P.: *Versuch einer Classification willkürlicher Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen.* J. reine angew. Math. (Crelle's Jounal) 79 (1875), 21-37.

[8] ——— , *Über eine veränderte Form der Bedingung für die Integrierbarkeit der Functionen.* Ebenda, 259-262.

[9] Riemann, B.: *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.* [Habilitationsschrift]. Abh. Königl. Gesellsch. Wiss. Göttingen, Bd. 13 (von den Jahren 1866 u. 1867), Göttingen [Unterserie: Abh. Math. Classe Königl. Gesellsch. Wiss. Göttingen, S. 87-132].
Wiederabgedruckt in:
Bernhard Riemann's *gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass.* Hrsg. unter Mitw. von R. Dedekind; von H. Weber

1) 1. Aufl.: Teubner-Verlag, Leipzig 1876;
2) 2. Aufl.: Teubner-Verlag, Leipzig 1892;
[**alle Seitenangaben beziehen sich auf diese Werkausgabe**];
3) ... / Collected papers. Hrsg. von R. Narasimhan. Springer-Verlag, Berlin; Teubner-Verlagsgesellsch. Leipzig 1990.

[10] Thomae, J.: *Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale.* Verlag Nebert, Halle 1875.