

# Übungen, Analysis I (ohne Stern), WiSem 2010/11

Bernd Kummer

12. Serie bis Mo, 24. 1. 11 ; 15.15 Uhr

1.

Es sei  $g(x) = x^3 + 2x - 1$ .

1.1 Warum existiert die inverse Funktion  $h$  zu  $g$  ?

1.2 Warum ist  $h$  in  $\bar{x} = 2$  differenzierbar und welche Ableitung besitzt  $h$  dort ?

1.3<sup>z</sup> Vergleichen Sie mit der Ableitung des Kehrwertes  $G(x) = \frac{1}{g(x)}$  in  $x = 1$  !

(2+2 P + 1 ZusatzP.)

2.

Beweisen Sie, dass für reelle  $\alpha, \beta$  stets  $e^{i\alpha+i\beta} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$  gilt.

(4 P)

3.

Warum hat die reelle Gleichung

$$c - 2x + \lambda (1 - \cos x) \sin x = 0$$

für jedes feste  $c$  und beliebiges  $\lambda \in (0, \frac{1}{3})$  stets eine eindeutige Lösung  $x$  ?

(4 P)

4.

Beweisen Sie für  $|x| \leq 1$  die Ungleichung

$$|x - x^3/3! + x^5/5! - \sin x| \leq 1/5000.$$

Wie kann man für  $|x| \leq 2$  abschätzen ? (3+1 P)

sum = 16 P und 1 ZusatzP. Viel Spass !

aktualisierter Stand der Vorlesung:

1. Woche Mi 20.10.

nat. Zahlen 0,1,2,... als bekannt angenommen.

Mengen: Inklusion, Vereinig, Durchschn. Diff., Produkt

Funktion  $f$ : A to B surjektiv, injektiv, bijektiv; Inverse Funktion  $g$  zu  $f$ .

gleiche Mächtigkeit per Bijektion.

zeigt fuer N und Q (posit.) per DiagonalMeth.

2. Woche 25. und 27. 10.

Gleiche Mächtigkeit von Q und N.

abzählbar, Intervall  $(-1, 1)$  und Gerade, Strecke-Quadrat. Reelle Zahlen nicht abzählbar per Dez.-Darstellung. Hilberts Hotel, Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation, Wohlordnung und vollst. Induktion.

Beispiele zu Indukt. Bernoulli-Ungl.  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$  für  $(x > -1)$ ,

Anzahl Teilmengen, Anzahl Permutat., 6 aus 49 und Binomialkoeff.  $n$  über  $k$   
Pascalsches Dreieck

Ganze Zahlen als Äquivalenzklassen geordneter Paaren nat. Zahlen

### 3. Woche 1. 11. und 3. 11.

Kurze Wiederh. und Interpretation von  $(m,n)$  als  $m \cdot n$ .

Rationale Zahlen über Paare und multipl. Verknüpfung; analog zu ganzen Zahlen. Satz Wurzel 2 nicht rational (zugleich typisch für indirekten Beweis).

Reelle Zahlen als Dedekind Schnitt  $r=(A,B)$ . Supremum und Intervallschachtelung. Noch nachtragen: Infimum und  $\inf M$  analog zu Supremum und  $\sup M$  nun für untere Schranken.

Zahlenkörper und Beispiel  $K = \{0, 1\}$ .

Komplexe Zahlen  $z = x + iy$ . Wir können sie jetzt addieren, multiplizieren und  $1/(x+iy)$  ausrechnen.

### 4. Woche 8. 11. und 10. 11.

Bezeichnungen für  $z=x+iy$ : Realteil  $x$ , Imaginarteil  $y$ , imaginäre Einheit  $i$ , Def. konj. komplex (Spiegelung an reeller Achse), Betrag.

Weiter mit PolarKoordinaten, Potenzen und Wurzeln.

Haben aber hier noch nicht die Eulersche Form. Die kommt erst, wenn wir die Reihen für den schulmäßig am Kreis definierten reellen  $\sin$  und  $\cos$  über Taylor- und Potenzreihen haben. Bisher kennen wir  $e$  nicht.

Konvergente/divergente (Zahlen-) Folgen.

Summe, Produkt, Quotient, Beispiele, Einschachteln, Konvergenz monotoner beschränkter Folgen.

### 5. Woche 15. 11. und 17. 11.

Konvergente/divergente Folgen.

Satz von Bolzano-Weierstrass, metrischer Raum, Beispiele, Cauchy-Folgen, Stetigkeit (über Folgen und  $(\epsilon, \delta)$ ), Konvergenz von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$ , offene, abgeschlossene (als Komplement von offenen Mengen und mittels Konvergenz charakterisiert) und (Folgen-) kompakte Mengen. Satz von Weierstrass (Maxima). Def. gleichm. Stetigkeit.

### 6. Woche 22. 11. und 24. 11.

Glm. Stetigkeit auf kompakten Mengen, Überdeckungssatz (Beweis nur für  $X=\mathbb{R}$ ) und Banach's Fixpunktsatz;

Kurze Wiederholung der zentralen Begriffe und Schwerpunkte. Reelle Zahlen: Supremum und Intervallschachtelung. komplexe Zahlen: Rechenregeln und Polarkoordinaten, Wurzeln und Potenzen.

(unendl.) Folgen in  $\mathbb{R}$  und im metrischen Raum  $X$  (Menge mit Metrik) (was ist eine Metrik  $d$ ?). In  $\mathbb{R}$ : Monotonie und Beschränktheit, beschränkte Folgen und konv. Teilfolgen, Cauchy-Folgen (in  $\mathbb{R}$  und  $X$ ) Konvergenz von Cauchy-Folgen in  $\mathbb{R}$ . (offene) Kugel  $B_0(x, \epsilon)$

Stetigkeit in  $x$  aus  $X$  und auf einer Menge. Spezielle Mengen in  $X$ : offen, abgeschlossen, kompakt.

Besonderheiten kompakter Mengen: Existenz des Maximums fuer stetige, reellwertige  $f$ . Kompakt in  $\mathbb{R}$  bedeutet beschränkt und abgeschlossen. Glm. Stetigkeit auf kompakten Mengen, Offene Ueberdeckung kompakter Mengen (Heine-Borel-Beweis nur fuer  $X=\mathbb{R}$ ),

Kontraktiv und vollstaendig; Banach's Fixpunktsatz.

Reihen als spezielle Folgen.

7. Woche 29. 11. und 1. 12. Die Zahl  $e$  als Limes und Summe. Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen (mit reellen Gliedern) Saetze: Leibnitz-Kriterium fuer alternierende Reihen (dick betont, dass dies nur eine hinreichende Bedingung fuer Konvergenz ist, obwohl es oft "Kriterium" heisst !!). Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz. Absolut konvergente Reihen darf man Umsortieren; Summe invariant.

8. Woche 6. 12. und 8. 12. Umordnung einer konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihe. Wurzel- und Quotientenkriterium und Potenzreihen. Stetigkeit von zusammengesetzten Funktionen (allgemein) von Summe, Produkt und Quotient (reelle Funktion) Erweiterung von Funktionen, gegeben auf  $\mathbb{Q}$ , zu einer Funktion auf  $\mathbb{R}$  (mittels glm Stetigkeit).

9. Woche 13. 12. und 15. 12. Stetigkeit der erweiterten Funktion; Beispiel, warum glm. Stetigkeit wichtig ist anhand von  $\sin(1/x - \sqrt{2})$ . Reelle stetige Funktionen und ihre stetigen Inversen (s. Hilfssaetze 1 und 2 im script). Eigenschaften der Logarithmusfunktion.

begin DIFFERENTIALRECHNUNG. Ableitung und Beispiele. Ableitung der Logarithmusfunktion  $\ln x$ .

10. Woche 3. 1. und 5. 1. 2011

Ableitung des sinus. Ableitungsregeln (alles zunaechst nur fuer reelle Funktionen): Summe, Produkt, Kettenregel (mit Erweiterung, siehe script). Damit dann inverse Funktion, cosinus. Logarithmische Ableitung. Damit bel. Potenzen und Exponentialfunktion. Quotientenregel und Tangens. Lokale Extrema und Nullableitung als notw. Bed.

11. Woche 10. 1. und 12. 1. 2011

Mittelwertsatz d. Diff.-Rechn., Mittelwertsatz und Kontraktivitaet, Hoehere Ableitungen, Taylorreihe und Folgerungen wie Fehlerabschaetzungen und hinr. Bed. fuer Min. und Max. Reihen fuer  $\sin x, \cos x, e^x$ . Motivation fuer Def. der entsprechenden komplexen Funktionen. Folgerung Eulersche Darstellung von  $e^{i\varphi}$ , Periodizitaet,  $i^i$ .

glm. Konvergenz von Funktionen (noch nicht).