Übungen, Analysis I (ohne Stern), WiSem 2010/11

Bernd Kummer

13. Serie   bis Mo, 31. 1. 11 ; 15.15 Uhr (es gibt noch eine Zusatzserie bis 7.2.)

1.
Für $a < b < c$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mögen die (Riemann-) Integrale $\int_a^b f(x)dx, \int_b^c f(x)dx$ und $\int_a^c f(x)dx$ existieren.
Warum gilt dann $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$?
3 P

2.
Berechnen Sie $\int_0^1 x\ dx$ und $\int_0^1 x^2\ dx$ jeweils als Grenzwert geeigneter Integralsummen.
2+3 P

3.
Es sei $f(y) = \ \int_{-y}^y\ |x| \cos(1-x)\ dx$.
Warum ist f (nach y) differenzierbar und wie sieht die Ableitung aus ?
3 P
Zusatz (2 P):
Welche partiellen Ableitungen (1. Ordnung) besitzt die Funktion

$$f(x,y) = e^{x-y} \tan(x+2y) \quad ?$$

4.
Bestimmen Sie die Integrale

$$\int_0^{\pi/2} x + \cos x\ dx, \quad \int_1^2 x^{-2}\ dx$$

und den Limes

$$\lim_{y\to\infty} \int_0^y e^{-x}\ dx$$

mittels Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
3 P

sum = 14 P + 2 ZusatzP. Viel Spass !

Informationen:

1. Klausur am Mi 16. 2. 11 Beginn 13.00 Uhr (ohne c.t.) wie üblich in 0.115 (Schroedinger) Ende 14.45 Uhr. Sie dürfen alles benutzen bis auf den Nachbarn/die

Nachbarin.

2. NachKlausur am Di 5. 4. 11 Beginn 11.00 Uhr (ohne c.t.) wie üblich in 0.115 (Schroedinger) Ende 12.45 Uhr.

Hinweis: Die Klausurergebnisse sollen anschliessend, sobald vorhanden, wie die Punkteliste ins Netz (HSNummer, Note) kommen. Wer dagegen ist, dort aufzutauchen, sollte das vorher Herrn Grothe mitteilen: grothe@math.hu-berlin.de

aktualisierter Stand der Vorlesung:

1. Woche Mi 20.10.

nat. Zahlen 0,1,2,... als bekannt angenommen.

Mengen: Inklusion, Vereinig, Durchschn. Diff., Produkt

Funktion f: A to B surjektiv, injektiv, bijektiv; Inverse Funktion g zu f.

gleiche Maechtigkeit per Bijektion.

gezeigt fuer N und Q (posit.) per DiagonalMeth.

2. Woche 25. und 27. 10.

Gleiche Maechtigkeit von Q und N.

abzaehlbar , Intervall (-1, 1) und Gerade, Strecke-Quadrat. Reelle Zahlen nicht abzaehlbar per Dez.-Darstellung. Hilberts Hotel, Aequivalenzrelation, Ordnungsrelation, Wohlordnung und vollst. Induktion.

Beispiele zu Indukt. Bernoulli-Ungl. $(1 + \mathrm{x})^n >= 1 + nx\ fuer\ (x > -1)$,

Anzahl Teilmengen, Anzahl Permutat, 6 aus 49 und Binomialkoeff. n ueber k Pascalsches Dreieck

Ganze Zahlen als Aequivalenzklassen geordneter Paaren nat. Zahlen

3. Woche 1. 11. und 3. 11.

Kurze Wiederh. und Interpretation von (m,n) als m-n.

Rationale Zahlen ueber Paare und multipl. Verknuepfung; analog zu ganzen Zahlen. Satz Wurzel 2 nicht rational (zugleich typisch fuer indirekten Beweis).

Reelle Zahlen als Dedekind Schnitt r=(A,B). Supremum und Intervallschachtelung. Noch nachtragen: Infimum und inf M analog zu Supremum und sup M nun fuer untere Schranken.

Zahlenkoerper und Beispiel K = { 0, 1 }.

Komplexe Zahlen z = x + i y. Wir koennen sie jetzt addieren, multipliz. und 1/(x+iy) ausrechnen.

4. Woche 8. 11. und 10. 11.

Bezeichnungen fuer z=x+iy: Realteil x, Imaginaerteil y, imaginaere Einheit i, Def. konj. komplex (Spiegelung an reeller Achse), Betrag.

Weiter mit PolarKoordinaten, Potenzen und Wurzeln.

Haben aber hier noch nicht die Eulersche Form. Die kommt erst, wenn wir die Reihen fuer den schulmaessig am Kreis definierten reellen sin und cos ueber Taylor- und Potenzreihen haben. Bisher kennen wir e nicht.

Konvergente/divergente (Zahlen-) Folgen.
Summe, Produkt, Quotient, Beispiele, Einschachteln, Konvergenz monotoner beschraenkter Folgen.

5. Woche 15. 11. und 17. 11.

Konvergente/divergente Folgen.
Satz von Bolzano-Weierstrass, metrischer Raum, Beispiele, Cauchy-Folgen, Stetigkeit (ueber Folgen und (eps,delta)), Konvergenz von Cauchy-Folgen in R, offene, abgeschlossene (als Komplement von offenen Mengen und mittels Konvergenz charakterisiert) und (Folgen-) kompakte Mengen. Satz von Weierstrass (Maxima). Def. gleichm. Stetigkeit.

6. Woche 22. 11. und 24. 11.

Glm. Stetigkeit auf kompakten Mengen, Ueberdeckungssatz (Beweis nur fuer X=R) und Banach's Fixpunktsatz;

Kurze Wiederholung der zentralen Begriffe und Schwerpunkte. Reelle Zahlen: Supremum und Intervallschachtelung. komplexe Zahlen: Rechenregeln und Polarkoordinaten, Wurzeln und Potenzen.

(unendl.) Folgen in R und im metrischen Raum X (Menge mit Metrik) (was ist eine Metrik d ?). In R: Monotonie und Beschrnktheit, beschrnkte Folgen und konv. Teilfolgen, Cauchy-Folgen (in R und X) Konvergenz von Cauchy-Folgen in R. (offene) Kugel Bo(x, eps)
Stetigkeit in x aus X und auf einer Menge. Spezielle Mengen in X: offen, abgeschlossen, kompakt.

Besonderheiten kompakter Mengen: Existenz des Maximums fuer stetige, reellwertige f. Kompakt in R bedeutet beschraenkt und abgeschlossen. Glm. Stetigkeit auf kompakten Mengen, Offene Ueberdeckung kompakter Mengen (Heine-Borel-Beweis nur fuer X=R),

Kontraktiv und vollstaendig; Banach's Fixpunktsatz.

Reihen als spezielle Folgen.

7. Woche 29. 11. und 1. 12. Die Zahl e als Limes und Summe. Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen (mit reellen Gliedern) Saetze: Leibnitz-Kriterium fuer alternierende Reihen (dick betont, dass dies nur eine hinreichende Bedingung fuer Konvergenz ist, obwohl es oft "Kriterium"heisst !!). Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz. Absolut konvergente Reihen darf man Umsortieren; Summe invariant.

8. Woche 6. 12. und 8. 12. Umordnung einer konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihe. Wurzel- und Quotientenkriterium und Potenzreihen. Stetigkeit von zusammengesetzten Funktionen (allgemein) von Summe, Produkt und Quotient (reelle Funktion) Erweiterung von Funktionen, gegeben auf Q, zu einer Funktion auf R (mittels glm Stetigkeit).

9. Woche 13. 12. und 15. 12. Stetigkeit der erweiterten Funktion; Beispiel, warum glm. Stetigkeit wichtig ist anhand von sin (1 / x- sqrt 2). Reelle stetige Funktio-

nen und ihre stetigen Inversen (s. Hilfssaetze 1 und 2 im script). Eigenschaften der Logarithmusfunktion.
begin DIFFERENTIALRECHNUNG. Ableitung und Beispiele. Ableitung der Logarithmusfunktion ln x.

10. Woche 3. 1. und 5. 1. 2011
Ableitung des sinus. Ableitungsregeln (alles zunaechst nur fuer reelle Funktionen): Summe, Produkt, Kettenregel (mit Erweiterung, siehe script). Damit dann inverse Funktion, cosinus. Logarithmische Ableitung. Damit bel. Potenzen und Exponentialfunktion. Quotientenregel und Tangens. Lokale Extrema und Nullableitung als notw. Bed.

11. Woche 10. 1. und 12. 1. 2011
Mittelwertsatz d. Diff.-Rechn., Mittelwertsatz und Kontraktivitaet, Hoehere Ableitungen, Taylorreihe und Folgerungen wie Fehlerabschaetzungen und hinr. Bed. fuer Min. und Max., L'Hospital, Divison eines Polynoms durch (x-a), wenn a eine Nullstelle. Reihen fuer $sinx, cosx, e^x$. Motivation fuer Def. der entsprechenden komplexen Funktionen. Folgerung Eulersche Darstellung von $e^{i\varphi}$, Periodizitaet von e^z, i^i.

12. Woche 17. 1. und 19. 1. 2011
glm. Konvergenz von Funktionen $f_n \to f$ auf einem Intervall und max-Norm. Typische Situation, wenn Taylor-Restglied $|R_n(x)| \leq \varepsilon(n) \to +0$ fuer alle x in einem Intervall. Begriff der partiellen Ableitung und notw. Bed. fuer lokale Extrema fuer $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Beginn INTEGRALRECHNUNG
Def. Riemann Integral, Integrierbarkeit stetiger Funktionen, Eigenschaften (Summe, Multipl. mit Konstanten, Vertauschen der Grenzen), Def. Stammfunktion.

13. Woche 24. 1. und 26. 1. 2011
stetige Integranden: Stammfunkt. exist. und ist bis auf Konstante eindeutig; Hauptsatz der Diff.und Integralrechnung;
Wichtige Grundintegrale, partielle Integration, die Form f'/f.