Übungen, Analysis I (ohne Stern), WiSem 2010/11

Bernd Kummer

2. Serie, bis Mo, 1. 11. 10

1. Sei A die Menge aller Paare (m, n) mit $m, n \in N$ (natürliche Zahlen mit Null). Wir definieren für Paare aus A:

$(m, n) \sim (m', n')$ falls $m + n' = n + m'$, wobei "+" die gewöhnliche Addition in N bezeichne.

Beweisen Sie, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation in A ist.

2. Man beweise mit Hilfe vollständiger Induktion die Gleichungen:

$$\sum_{k=1}^n k^3 \ (= 1^3 + 2^3 + \ ... \ + n^3) \ = \ [\tfrac{1}{2} n(n+1)]^2 \qquad (n \geq 1)$$

$$\sum_{k=1}^n \tfrac{1}{k(k+1)} \ (= \tfrac{1}{1*2} + \tfrac{1}{2*3} + ... + \tfrac{1}{n(n+1)}) \ = \ \tfrac{n}{n+1} \qquad (n \geq 1).$$

3. Benutzen Sie Ihr (Schul-)Wissen über Potenzen um zu beweisen:

Mit $\alpha = \sqrt{2}$ gilt für die Zahlen

$$x_1 = \alpha, \ x_2 = \alpha^\alpha, ..., \ x_{n+1} = \alpha^{x_n}, ...$$

und jedes natürliche $n \geq 1$ stets $x_n \leq 2$.

(je 4 Punkte)

Viel Spass.

Bitte Aufgaben auf getrennte Zettel mit Ihren Koordinaten.