Übungen, Analysis I (ohne Stern), WiSem 2010/11

Bernd Kummer

5. Serie, bis Mo, 22. 11. 10 ; 15.15 Uhr (in Neumann II, 4. Etage links stehen Kartons)

1.
Zwei reelle Folgen $\{a_n\}_{n\in N}$, $\{b_n\}_{n\in N}$ seien konvergent. Mit irgendwelchen reellen $\lambda_n \in (0,1)$ werde die Folge $\{c_n\}_{n\in N}$ durch $c_n = \lambda_n a_n \ + \ (1-\lambda_n) b_n$ gebildet.

1.1 Wieso besitzt diese Folge stets eine konvergente (unendliche) Teilfolge ?
1.2 Geben Sie derartige Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ so an, dass die Folge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht selbst konvergiert.

1.3 Zwei Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seien beliebig mit $a_n b_n \neq 0$ fixiert (nicht notwendig konvergent). Man bilde die Folge $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{|a_n| + |b_n|} - \cos(n^2).$$

Besitzt sie stets eine konvergente Teilfolge ?
(2+2+2 P)

2:
Beweisen Sie:
2.1 Wenn $0 < q < 1$, so ist die Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = q + q^2 + ... + q^n$$

konvergent. Welchen Limes besitzt sie ?
Bestimmen Sie
2.2 $\lim_{k\to\infty} \sqrt{2k - \sin k} \ - \ \sqrt{2k+9}$.
(2+2 P)

3. Für reelles $a > 0$ bilde man

$$x_1 = \ 1 + a \quad \text{ und allgemein } \quad x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \qquad (n \geq 1).$$

Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.
Hilfe: Man kann z.B. $x_n = t_n\sqrt{a}$ setzen und Monotonie der t_n nachweisen und nutzen. Sie dürfen natürlich auch anders vorgehen.
(4 P)

4.
Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, für welche $\frac{1}{(1+i)^n}$ reell ist. (4 P)

(sum = 18 P)
Viel Spass.
Wie stets: Name des Üb-Leiters bitte mit angeben !

Informationen.
Abgabe als Gruppe (2 oder 3 Studenten/innen) ist möglich und erwünscht.

! Sie koennen die Übungsgruppe noch beliebig wechseln; wir streben weiterhin eine näherungsweise Gleichverteilung an, nutzen Sie bitte auch die mit viel Aufwand eingerichteten neuen Gruppen. Wer in welcher Gruppe ist, erfahren wir durch die abgegebenen Aufgaben, Sie brauchen keine neuen Zettel auszufüllen.

Achtung, bei den angegebenen links zu
http://www.mathematik.hu-berlin.de/ kummer
ÜbAufg: http://www.mathematik.hu-berlin.de/ kummer/teach/analysis/index.html
Musterlösungen freundlicherweise unter http://www.math.hu-berlin.de/ falk
ist das Leerzeichen vor den Namen ein (Äquivalenz-) kringel; pdf will es nicht.

kleiner Service: Stand der Vorlesung (was haben wir bisher behandelt ?)
(aus zeitgruenden nicht im Latex-stile)
1. Woche Mi 20.10.
nat. Zahlen 0,1,2,... als bekannt angenommen.
Mengen:İnklusion, Vereinig, Durchschn. Diff., Produkt
Funktion f: A to B surjektiv, injektiv, bijektiv; Inverse Funktion g zu f.
gleiche Maechtigkeit per Bijektion.
gezeigt fuer N und Q (posit.) per DiagonalMeth.

2. Woche 25. und 27. 10.
Gleiche Maechtigkeit von Q und N.
abzaehlbar , (Hilberts Hotel ausgelassen, am 1.11. gebracht) Intervall (-1, 1) und Gerade, Strecke-Quadrat. Reelle Zahlen nicht abzaehlbar per Dez.-Darstellung.
Aequivalenzrelation, Ordnungsrelation, Wohlordnung und vollst. Induktion.
Beispiele zu Indukt. Bernoulli-Ungl. (1 + x)^n $>= 1 + nx\ fuer\ (x > -1), n = 1, 2, ...$
Anzahl Teilmengen, Anzahl Permutat, 6 aus 49 und Binomialkoeff. n ueber k Pascalsches Dreieck
Ganze Zahlen als Aequivalenzklasse geordneter Paaren nat. Zahlen

3. Woche 1. 11. und 3. 11.
Kurze Widerh. und Interpretation von (m,n) als m-n.
Rationale Zahlen ueber Paare und multipl. Verknuepfung; analog zu ganzen Zahlen. Satz Wurzel 2 nicht rational (zugleich typisch fuer indirekten Beweis).
Reelle Zahlen als Dedekind Schnitt r=(A,B). Supremum und Intervallschachtelung. Noch nachtragen: Infimum und inf M analog zu Supremum und sup M nun fuer untere Schranken.

Zahlenkoerper und Beispiel K = { 0, 1 }.

Komplexe Zahlen z=x+iy. Wir koennen sie jetzt addieren, multipliz. und 1/(x+iy) ausrechnen.

4. Woche 8. 11. und 10. 11.

Bezeichnungen fuer z=x+iy: Realteil x, Imaginaerteil y, imaginaere Einheit i, Def. konj. komplex (Spiegelung an reeller Achse), Betrag.

Weiter mit PolarKoordinaten, Potenzen und Wurzeln. [Additionstheorem fuer sin (alpha+beta) aus Flaechensatz 2F= xy sin(phi), oberer Winkel vertikal zerlegt = alpha+beta; cos (alpha)= sin(pi/2 -alpha)]. Haben aber hier noch nicht die Eulersche Form. Die kommt erst, wenn wir die Reihen fuer den schulmaessig am Kreis definierten reellen sin und cos ueber Taylor- und Potenzreihen haben. Bisher kennen wir e nicht. Hinweis auf Fundamentalsatz der Algebra (kommt spaeter).

Konvergente/divergente (Zahlen-) Folgen.
Summe, Produkt, Quotient, Beispiele, Einschachteln, Konvergenz monotoner beschraenkter Folgen, Satz von Bolzano-Weierstrass (noch nicht fertig).

5. Woche 15. 11. und 17. 11.

Konvergente/divergente (Zahlen-) Folgen.
Satz von Bolzano-Weierstrass, Cauchy-Folgen, Stetigkeit (ueber Folgen und (eps,delta)), Beispiele. Reihen als spezielle Folgen.