Übungen, Analysis I (ohne Stern), WiSem 2010/11

Bernd Kummer

6. Serie, bis Mo, 29. 11. 10 ; 15.15 Uhr (in Neumann II, 4. Etage links)

1.
Für $x, y \in \mathbb{R}$ werde eine Funktion d durch $d(x,y) = |x-y| + (x-y)^2$ definiert. Warum ist das keine Metrik ?
(3 P)

2.
Es sei F die Menge aller auf dem Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ definierten, reellwertigen und stetigen Funktionen $f = f(x)$. Für beliebige $f, g \in F$ setze man

$$d(f,g) \;=\; \sup \;\{\; |f(x) - g(x)| \;\; | \; x \in [0,1] \;\}.$$

Zeigen Sie, dass F damit zu einem metrischen Raum wird (vergessen Sie nicht, dass $d(f,g)$ dazu auch endlich sein muss !).
(5 P)

3.
Beweisen Sie, dass in jedem metrischen Raum gilt: Die Vereinigung und der Durchschnitt zweier kompakter Mengen sind wieder kompakt.
(4 P)

4.
Beweisen Sie (analytisch, ohne Geometrie), dass die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit $d(z,\zeta) = |z-\zeta|$ tatsächlich ein metrischer Raum ist.
Hinweis: Am einfachsten, indem Sie zunächst ausrechnen, dass $|z+\zeta| \le |z| + |\zeta|$ gilt und dann diese Ungleichung (wie im Reellen) nutzen.
(4 P)

(sum = 16 P) Viel Spass.

Wie stets: Name des Übungsleiters bitte mit angeben !
Abgabe als Gruppe (2 oder 3 Studenten/innen) ist möglich und erwünscht.

aktualisierter Stand der Vorlesung:
1. Woche Mi 20.10.
   nat. Zahlen 0,1,2,... als bekannt angenommen.
   Mengen:İnklusion, Vereinig, Durchschn. Diff., Produkt
   Funktion f: A to B surjektiv, injektiv, bijektiv; Inverse Funktion g zu f.
   gleiche Maechtigkeit per Bijektion.

gezeigt fuer N und Q (posit.) per DiagonalMeth.

2. Woche 25. und 27. 10.

Gleiche Maechtigkeit von Q und N.

abzaehlbar , (Hilberts Hotel erst am 1.11. gebracht) Intervall (-1, 1) und Gerade, Strecke-Quadrat. Reelle Zahlen nicht abzaehlbar per Dez.-Darstellung.

Aequivalenzrelation, Ordnungsrelation, Wohlordnung und vollst. Induktion.

Beispiele zu Indukt. Bernoulli-Ungl. (1 + x)^n $>= 1 + nx\ fuer\ (x > -1)$,

Anzahl Teilmengen, Anzahl Permutat, 6 aus 49 und Binomialkoeff. n ueber k Pascalsches Dreieck

Ganze Zahlen als Aequivalenzklassen geordneter Paaren nat. Zahlen

3. Woche 1. 11. und 3. 11.

Kurze Wiederh. und Interpretation von (m,n) als m-n.

Rationale Zahlen ueber Paare und multipl. Verknuepfung; analog zu ganzen Zahlen. Satz Wurzel 2 nicht rational (zugleich typisch fuer indirekten Beweis).

Reelle Zahlen als Dedekind Schnitt r=(A,B). Supremum und Intervallschachtelung. Noch nachtragen: Infimum und inf M analog zu Supremum und sup M nun fuer untere Schranken.

Zahlenkoerper und Beispiel K = { 0, 1 }.

Komplexe Zahlen z=x+iy. Wir koennen sie jetzt addieren, multipliz. und 1/(x+iy) ausrechnen.

4. Woche 8. 11. und 10. 11.

Bezeichnungen fuer z=x+iy: Realteil x, Imaginaerteil y, imaginaere Einheit i, Def. konj. komplex (Spiegelung an reeller Achse), Betrag.

Weiter mit PolarKoordinaten, Potenzen und Wurzeln.

Haben aber hier noch nicht die Eulersche Form. Die kommt erst, wenn wir die Reihen fuer den schulmaessig am Kreis definierten reellen sin und cos ueber Taylor- und Potenzreihen haben. Bisher kennen wir e nicht.

Konvergente/divergente (Zahlen-) Folgen.
Summe, Produkt, Quotient, Beispiele, Einschachteln, Konvergenz monotoner beschraenkter Folgen.

5. Woche 15. 11. und 17. 11.

Konvergente/divergente Folgen.
Satz von Bolzano-Weierstrass, metrischer Raum, Beispiele, Cauchy-Folgen, Stetigkeit (ueber Folgen und (eps,delta)), Konvergenz von Cauchy-Folgen in R, offene, abgeschlossene (als Komplement von offenen Mengen und mittels Konvergenz charakterisiert) und (Folgen-) kompakte Mengen. Satz von Weierstrass (Maxima). Def. gleichm. Stetigkeit.

6. Woche 22. 11. und 24. 11.

weiter mit: Glm. Stetigkeit auf kompakten Mengen, Ueberdeckungssatz (Beweis nur fuer X=R) und Banach's Fixpunktsatz; Reihen als spezielle Folgen.