Übungen, Analysis I (ohne Stern), WiSem 2010/11

Bernd Kummer

7. Serie, bis Mo, 6. 12. 10 ; 15.15 Uhr (in Neumann II, 4. Etage links)

1.
Seien f und g reelle Funktionen (von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$), beide stetig im Nullpunkt. Gelte weiter $|g(x)| \geq c$ für alle x im Intervall $I_c = (-\frac{1}{c}, \frac{1}{c})$ mit einem positiven c.
Beweisen Sie: Dann die auf I_c definierte Funktion $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ stetig in $\bar{x} = 0$. (4 P)
1^z. Zeigen Sie (Beispiel), dass die Aussage für unstetige g nicht gelten muss. (2 P)

2.
Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und sei $M \subset X$ kompakt und nicht leer. Weiter sei $f : X \to Y$ stetig auf M und $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ das Bild von M. Man zeige, dass $f(M)$ kompakt in Y ist.
(4 P)
2^z Geben Sie Beispiele mit $X = Y = \mathbb{R}$ und $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ dafür an, dass die analogen Aussagen für offene bzw. abgeschlossene M und $f(M)$ nicht gelten. (2P)

3.
Neun Klein-Fritzchens sollen sich 10 Stück Kuchen teilen. Im ersten Schritt nehmen sich alle 1 Stück. Dann stellen sie fest, dass man die übrigen zehn Zehntel ja auch teilen kann, also hat im 2. Schritt jeder $1 + \frac{1}{10} = 1.1$ Stück. Analog teilen sie weiter und bekommen so 1.11, 1.111 usw. viele Stücke.

Ein Mathematiker kommt hinzu und rät: Ihr wollt eigentlich $x = \frac{10}{9}$ lösen. Das ist die Fixpunktgleichung $f(x) = x$ mit $f(x) = 1 + \frac{x}{10}$, die man mit der sukzessiven Approximation aus Banach's Fixpunktsatz und mit jedem Anfangswert lösen kann. Ist das korrekt ? (2 P)
Nun wenden sie die Methode an. Sie beginnen mit $x_0 = 0$ und setzen allgemein wie verlangt $x_{n+1} = f(x_n)$. Welche Folge erhalten sie explizit ? (2 P)
Einer schlägt vor: Nehmen wir doch $x_0 = 100$, dann kommt sicher mehr heraus. Welche Folge entsteht jetzt ? (3 P)
(7 = 2+2+3 Punkte)

Mit den Aufgaben $1^z, 2^z$ kann man Zusatzpunkte erwirtschaften, also mehr als 100 Prozent per Serie erreichen.
Total: sum normal = 4+4+7 P; dazu 4 Zusatzpunkte. Viel Spass.
Wie stets: Name des Übungsleiters bitte mit angeben ! Die Zeit der Übung ist auch von Nutzen, falls ein Üb-Leiter 2 Übungen hat.
Abgabe als Gruppe (2 oder 3 Studenten/innen) ist möglich und erwünscht. Von 5 hat keiner geredet.

aktualisierter Stand der Vorlesung:
1. Woche Mi 20.10.

nat. Zahlen 0,1,2,... als bekannt angenommen.

Mengen:İnklusion, Vereinig, Durchschn. Diff., Produkt

Funktion f: A to B surjektiv, injektiv, bijektiv; Inverse Funktion g zu f.

gleiche Maechtigkeit per Bijektion.

gezeigt fuer N und Q (posit.) per DiagonalMeth.

2. Woche 25. und 27. 10.

Gleiche Maechtigkeit von Q und N.

abzaehlbar , (Hilberts Hotel erst am 1.11. gebracht) Intervall (-1, 1) und Gerade, Strecke-Quadrat. Reelle Zahlen nicht abzaehlbar per Dez.-Darstellung.

Aequivalenzrelation, Ordnungsrelation, Wohlordnung und vollst. Induktion.

Beispiele zu Indukt. Bernoulli-Ungl. (1 + x)^n $>= 1 + nx\ fuer\ (x > -1)$,

Anzahl Teilmengen, Anzahl Permutat, 6 aus 49 und Binomialkoeff. n ueber k Pascalsches Dreieck

Ganze Zahlen als Aequivalenzklassen geordneter Paaren nat. Zahlen

3. Woche 1. 11. und 3. 11.

Kurze Wiederh. und Interpretation von (m,n) als m-n.

Rationale Zahlen ueber Paare und multipl. Verknuepfung; analog zu ganzen Zahlen. Satz Wurzel 2 nicht rational (zugleich typisch fuer indirekten Beweis).

Reelle Zahlen als Dedekind Schnitt r=(A,B). Supremum und Intervallschachtelung. Noch nachtragen: Infimum und inf M analog zu Supremum und sup M nun fuer untere Schranken.

Zahlenkoerper und Beispiel K = { 0, 1 }.

Komplexe Zahlen z=x+iy. Wir koennen sie jetzt addieren, multipliz. und 1/(x+iy) ausrechnen.

4. Woche 8. 11. und 10. 11.

Bezeichnungen fuer z=x+iy: Realteil x, Imaginaerteil y, imaginaere Einheit i, Def. konj. komplex (Spiegelung an reeller Achse), Betrag.

Weiter mit PolarKoordinaten, Potenzen und Wurzeln.

Haben aber hier noch nicht die Eulersche Form. Die kommt erst, wenn wir die Reihen fuer den schulmaessig am Kreis definierten reellen sin und cos ueber Taylor- und Potenzreihen haben. Bisher kennen wir e nicht.

Konvergente/divergente (Zahlen-) Folgen.

Summe, Produkt, Quotient, Beispiele, Einschachteln, Konvergenz monotoner beschrnkter Folgen.

5. Woche 15. 11. und 17. 11.

Konvergente/divergente Folgen.

Satz von Bolzano-Weierstrass, metrischer Raum, Beispiele, Cauchy-Folgen, Stetigkeit (ueber Folgen und (eps,delta)), Konvergenz von Cauchy-Folgen in R, offene, abgeschlossene (als Komplement von offenen Mengen und mittels Konvergenz charakterisiert) und (Folgen-) kompakte Mengen. Satz von Weierstrass (Maxima). Def. gleichm. Stetigkeit.

6. Woche 22. 11. und 24. 11.

Glm. Stetigkeit auf kompakten Mengen, Ueberdeckungssatz (Beweis nur fuer X=R) und Banach's Fixpunktsatz;

Kurze Wiederholung der zentralen Begriffe und Schwerpunkte. Reelle Zahlen: Supremum und Intervallschachtelung. komplexe Zahlen: Rechenregeln und Polarkoordinaten, Wurzeln und Potenzen.

(unendl.) Folgen in R und im metrischen Raum X (Menge mit Metrik) (was ist eine Metrik d ?). In R: Monotonie und Beschrnktheit, beschrnkte Folgen und konv. Teilfolgen, Cauchy-Folgen (in R und X) Konvergenz von Cauchy-Folgen in R. (offene) Kugel Bo(x, eps)
Stetigkeit in x aus X und auf einer Menge. Spezielle Mengen in X: offen, abgeschlossen, kompakt.

Besonderheiten kompakter Mengen: Existenz des Maximums fuer stetige, reellwertige f. Kompakt in R bedeutet beschraenkt und abgeschlossen. Glm. Stetigkeit auf kompakten Mengen, Offene Ueberdeckung kompakter Mengen (Heine-Borel-Beweis nur fuer X=R),

Kontraktiv und vollstaendig; Banach's Fixpunktsatz.

Reihen als spezielle Folgen.

weiter mit: Die Zahl e.