Lösungsideen zu den Übungen, Analysis II (ohne Stern), SoSem 2011, Serien 2-13

Bernd Kummer

Nicht alles ist bis ins Letzte ausgeführt.

1. Serie bis Mo, 18. 4. 2011 war Wiederholung;

---

2. Serie bis Mi, 27. 4. 2011 ;

Aufgabe 1:

(4 P) Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \max\{x_1^2,\ x_2^2\}$ (Frechet-) differenzierbar in $\bar{x} = (0, 0)$? (Begründung)

Ja, denn wenn $x \neq 0$ und (z.B.) $x_1^2 \leq x_2^2$, so folgt

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{\|x\|} = \frac{x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leq \frac{x_2^2}{\sqrt{x_2^2}} = \sqrt{|x_2|}.$$

Analog schliesst man fuer $x_2^2 \leq x_1^2$ dass

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{\|x\|} \leq \sqrt{|x_1|}.$$

Falls also $\|x\| \to 0$ konvergiert, strebt der Diffenzenquotient stets gegen Null. Die Ableitung (als lineare Funktion) ist die Nullfunktion.

Aufgabe 2:

(4 P) In welchen Punkten $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \min\{|x_1|,\ |x_2|\}$ nicht partiell differenzierbar ? (Begründung)

Im Nullpunkt ist sie partiell differenzierbar (Vorlesung). Falls $|\bar{x}_1| > |\bar{x}_2|$, ist f für kleine Abstände $\|x - \bar{x}\|$ identisch mit der Funktion $h(x) = |x_2|$. Dann ist $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} = 0$ aber $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2}$ existiert (wie von der Betragsfunktion bekannt) genau dann, wenn $\bar{x}_2 \neq 0$. Analog fuer $|\bar{x}_1| < |\bar{x}_2|$. Falls schliesslich $|\bar{x}_1| = |\bar{x}_2| \neq 0$, ist f nicht partiell differenzierbar; man betrachte z.B. $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ mit dem Differenzenquotienten $[f(\bar{x} + (h, 0)) - f(\bar{x})]/h$ für $h > 0$ und $h < 0$.

Aufgabe 3:

a) (4 P) Warum besitzt die reelle Funktion

$$f = \begin{cases} x^4 \ (\ 2 + \sin(1/x) \ ) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

eine überall stetige Ableitung ?

Wegen $|f| \leq 3x^4$ und $|(f(h) - f(0))/h| \leq 3|h^3| \to 0$ für alle $h \to 0, h \neq 0$ hat f die Ableitung $f'(0) = 0$. Wenn $x \neq 0$, besitzt f (nach Produkt- und Kettenregel) die Ableitung

$$f' = x^2 \ [\ 4x \ (\ 2 + \sin(1/x) \ ) - \cos(1/x) \ ].$$

Sie ist stetig in allen $x \neq 0$ (als Verknüpfung stetiger Funktionen). Die eckige Klammer bleibt beschränkt, wenn $x \to 0$. Also ist $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$, d.h., f' ist auch im Nullpunkt stetig.

b) (4 P) Berechnen Sie die zweiten partiellen Ableitungen von

$$f = \sqrt{x^2 + y}, \qquad y > 0.$$

(Es ist günstig so umzuformen, dass der Nenner $(x^2 + y)^{3/2}$ wird)

1. Ableitungen : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}$

2. Ableitungen (nachrechnen !):

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = x \ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y}}\right) = x \ \frac{0 * \sqrt{x^2+y} \ - \ \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}}{x^2+y} = -\frac{1}{2} \ \frac{x}{(x^2+y)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2} \ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y}}\right) = \frac{1}{2} \ \frac{0 * \sqrt{x^2+y} \ - \ \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}}{x^2+y} = -\frac{1}{2} \ \frac{x}{(x^2+y)^{3/2}}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1 * \sqrt{x^2+y} \ - \ x\frac{x}{\sqrt{x^2+y}}}{x^2+y} = \frac{(x^2+y) \ - \ x^2}{(x^2+y)\sqrt{x^2+y}} = \frac{y}{(x^2+y)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y}}\right) = \frac{1}{2} \ \frac{0 * \sqrt{x^2+y} \ - \ 1 * \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}}{(x^2+y)} = -\frac{1}{4} \ \frac{1}{(x^2+y)^{3/2}}.$$

---

3. Serie bis Mo, 2. 5. 2011 ;

Aufgabe 1:

(5 P) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Frechet-) differenzierbar in $\bar{x}$, und $\bar{x}$ sei ein lokaler Minimalpunkt von f. Warum ist dann $Df(\bar{x})$ die Nullfunktion ?

1. Anhand der Definition:
Wir wissen:

$$f(\bar{x} + u) - f(\bar{x}) = Df(\bar{x})u + o(u).$$

Ist $u = tv, t \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$, so folgt

$$f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) = tDf(\bar{x})v + o(tv).$$

Damit folgt mit kleinen $t > 0$ aus der Minimalität:

$$0 \leq \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} = Df(\bar{x})v + \frac{o(tv)}{t}.$$

Weil $\frac{o(tv)}{\|tv\|} = \frac{o(tv)}{|t|\|v\|} = \frac{1}{\|v\|}\frac{o(tv)}{|t|}$ gegen Null strebt (wenn $t \to 0$), folgt also $Df(\bar{x})v \geq 0$. Mit kleinen $t < 0$ folgt aus der Minimalität:

$$0 \geq \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} = Df(\bar{x})v + \frac{o(tv)}{t}$$

und analog zu oben $Df(\bar{x})v \leq 0$. Also ist $Df(\bar{x})v = 0$ für alle $v \neq 0$, und für $v = 0$ ebenfalls wegen der Linearität.

2. kuerzer:
Wir wissen (Vorl.) , dass die Ableitung stets die Form $Df(\bar{x})u = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2}u_2$ besitzt. Aus Anal. I wissen wir ausserdem, dass in einem lokalen Extremalpunkt alle partiellen Ableitungen verschwinden. Also ist $Df(\bar{x})$ die Nullfunktion wegen $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2} = 0$.

Aufgabe 2:

(6 = 3+3 P) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Frechet-) differenzierbar in $\bar{x}$, und $v \in \mathbb{R}^2,\ v \neq 0$ sei beliebig fixiert. Für die reelle Funktion g mit

(a) $\qquad g(t) = f(\bar{x} + \ t\ v),\ t \in \mathbb{R}$

(b) $\qquad g(t) = f(\bar{x} + \ t^2 v),\ t \in \mathbb{R}$

bestimme man die Ableitung in $t = 0$ mittels $Df(\bar{x})$.

(a) Wir wissen:

$$g(t) - g(0) = f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x}) = tDf(\bar{x})v + o(tv).$$

Weil

$$\frac{o(tv)}{\|tv\|} = \frac{o(tv)}{|t|\|v\|} = \frac{1}{\|v\|}\frac{o(tv)}{|t|}$$

gegen Null strebt (wenn $t \to 0, t \neq 0$), folgt also nach Division durch t und Grenzübergang

$$g'(0) = Df(\bar{x})v = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}v_1 + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2}v_2\ .$$

(b) Jetzt ist

$$g(t) - g(0) = f(\bar{x} + t^2 v) - f(\bar{x}) = t^2 Df(\bar{x})v + o(t^2 v).$$

Weil

$$\frac{o(t^2v)}{\|t^2v\|} = \frac{o(t^2v)}{t^2\|v\|} = \frac{1}{\|v\|}\frac{o(t^2v)}{|t|^2}$$

gegen Null strebt (wenn $t \to 0$), muss erst recht $\lim_{t\to 0,\ t\neq 0} \frac{o(t^2v)}{|t|} = 0$ sein. Also folgt jetzt nach Division durch $t \neq 0$ und Grenzübergang $g'(0) = 0$.

Aufgabe 3:

a) (2 P) Warum ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nicht notwendig linear, wenn $f(0) = 0$ gilt, die zweiten partiellen Ableitungen überall existieren und im Nullpunkt ebenfalls Null sind (Gegenbeispiel) ?

b) (5 P) Warum ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stets linear, wenn $f(0) = 0$ gilt, die 2. partiellen Ableitungen überall existieren und in *jedem* Punkt Null sind ? (Betrachten Sie achsenparalle Änderungen des Arguments und wenden Sie den Mittelwertsatz der Diff. Rechnung an auf $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ und f)

a) $f = x^3 + y^3$

b) Wegen MWSatz ändert sich die ersten partiellen Ableitungen nicht, wenn x auf den Koordinatenachsen liegt, denn es gilt für die x_1- Achse

$$\frac{\partial f(s,0)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial x_1^2}\ s\ = 0, \quad \theta \text{ zwischen } (s,0) \text{ und } (0,0)$$

und

$$\frac{\partial f(s,0)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial x_1 \partial x_2}\ s = 0, \quad \theta \text{ zwischen } (s,0) \text{ und } (0,0).$$

Analog kann man die x_2- Achse betrachten. Fuer achsenparallele Änderungen erhält man die Konstantheit von Df ebenfalls, indem man

$$\frac{\partial f(\bar{x} + (s,0))}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\bar{x} + (0,0))}{\partial x_1}$$

usw. wie oben betrachtet. Also ist der Gradient konstant wegen

$$\nabla f(s,t) - \nabla f(0,0) = (\nabla f(s,t) - \nabla f(s,0)) + (\nabla f(s,0) - \nabla f(0,0)) = 0.$$

Damit folgt

$$f(s,0) - f(0,0) = \frac{\partial f(\theta)}{\partial x_1}\ s\ = \frac{\partial f(0)}{\partial x_1}\ s\ = 0, \quad \theta \text{ zwischen } (s,0) \text{ und } (0,0)$$

mit analogem Schluss für $f(0,s) - f(0,0)$ und $f(\bar{x} + (0,s)) - f(\bar{x})$, $f(\bar{x} + (s,0)) - f(\bar{x})$. Hiermit ist f linear:

$$f(s,t) - f(0,0) = (f(s,t) - f(s,0)) + (f(s,0) - f(0,0)) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_2}\ t + \frac{\partial f(0)}{\partial x_1}\ s\ .$$

4. Serie bis Mo, 9. 5. 2011 ;

Aufgabe 1:

(2+2 P) Überprüfen Sie die Symmetrie (gemischter) zweiter Ableitungen anhand der Beispiele

$$(a) \qquad f(x,y) = x^2 \cosh y - ye^{(x^2)}$$

$$(b) \qquad f(x,y) = y\ln(x^2) - x\sqrt{y}, \qquad x,y > 1$$

mit reellen x, y.

Lösung:
(a) Es ist:

$$\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cosh y - 2xye^{(x^2)} & \text{und} & \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = 2x\sinh y - 2xe^{(x^2)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2\sinh y - e^{(x^2)} & \text{und} & \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 2x\sinh y - 2xe^{(x^2)} \end{array}$$

(b) Es ist $\ln(x^2) = 2\ln x$:

$$\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y}{x} - \sqrt{y} & \text{und} & \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x^2) - \frac{x}{2\sqrt{y}} & \text{und} & \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2\sqrt{y}}. \end{array}$$

Aufgabe 2:

(5 P) Man betrachte die Lösungen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von

$$F(x,y) = 0 \quad \text{für } F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \tag{1}$$

in der Nähe der Punkte $a = (1,\ 0), \qquad b = (0,\ 1), \qquad c = (\frac{1}{2}\sqrt{2},\ \frac{1}{2}\sqrt{2})$.

In welchen Situationen wird (nach dem Satz über implizite Funktionen) durch (1) lokal eine eindeutige Funktion $y = y(x)$ definiert und wie sieht dann deren Ableitung an den gegebenen Stellen aus ?

Lösung: Es soll y eine Funktion von x werden. Also verlangt der Satz $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \neq 0$, womit a ausscheidet (1P).

Es ist ansonsten $y' = -(\frac{\partial F}{\partial y})^{-1}\ \frac{\partial F}{\partial x}$ in b bzw. c. Das liefert
mit b: $\quad y'(1) = -(2y)^{-1}\ 2x = -x/y = \ 0$
und mit c: $y'(1) = -x/y = -1$. (je 2 P)

Aufgabe 3:

(7 P) Man betrachte analog zu Aufgabe 2 die Lösungen $(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$ des

Gleichungssystems

$$F_i(x,y) = 0 \quad \text{für} \quad F_i(x,y) = x^i + \ y_1^2 + \ i\ y_2 - (2+i) \qquad (i = 1,2) \qquad (2)$$

nahe $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,1,1)$, wobei nun $y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in \mathbb{R}^2$ gilt und die beiden Ableitungen y_i' (nach x) in $x = 1$ gefragt sind.

Lösung: Nun ist die Matrix $\frac{\partial F}{\partial y}$ aller $a_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ in $(\bar{x}, \bar{y}) = (1,1,1)$ zu untersuchen.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} = 2y_1 = 2, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y_2} = 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1} = 2y_1 = 2, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y_2} = 2$$

Sie ist regulär mit der Inversen

$$(DF_y)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist $\frac{\partial F_1}{\partial x} = 1$ und $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2$ in $(\bar{x}, \bar{y})$, also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

folglich

$$y'(1) = \begin{pmatrix} y_1'(1) \\ y_2'(1) \end{pmatrix} = -\ (DF_y)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \ -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

5. Serie bis Mo, 16. 5. 2011 ;

Aufgabe 1:

(3+3 P) Man betrachte zwei Lösungen $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ des Gleichungssystems

$$F(z) = c \quad (\in \mathbb{R}^2) \quad \text{mit } F(z) = \begin{pmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x^2 + y \\ y + y^2 + xy \end{pmatrix} \qquad (3)$$

für $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, nämlich $\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $z^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) In der Nähe welcher dieser Lösung gibt es - nach dem Satz über implizite Funktionen - zu normkleinen c lokal eindeutige und (bezüglich c) differenzierbare Lösungen $z = z(c)$ von (3) ?

(b) Wie sieht dann die (Frechet-) Ableitung Dz als Funktion von c im entsprechenden Punkt aus ?

Die Jacobi-Matrix J hat, für den impl. Funkt. Satz zu $F - c = 0$, regulär zu sein,

$$J(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{\text{in } (x,y)} = \begin{pmatrix} 1+2x & 1 \\ y & 1+2y+x \end{pmatrix}.$$

Mit $\det J = (1+2x)(1+2y+x) - y$ folgt $\det J(\bar{z}) = 1 \neq 0$, $\det J(z^*) = 0$.

$$J(\bar{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J(\bar{z})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$Dz(c) = J(\bar{z})^{-1}c$ liefert $Dz(c) = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2:

(5 +1 P) Man betrachte die Lösungen $(x, y) \in \mathbb{R}^{1+2}$ von

$$F(x,y) = c \in \mathbb{R}^2 \quad \text{für } F(x,y) = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a\ e^{y_1} + xy_2 \\ 2x + b\ e^{y_2} - xy_1 \end{pmatrix}$$

mit reellen, nichtnegativen Konstanten a, b. Gelte

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{c}.$$

(a) Bei welcher Wahl von a, b und $\bar{c}$ kann der Satz über implizite Funktionen für die Lösungen $y = y(x)$ von $F(x,y) - \bar{c} = 0$ nahe $(\bar{x}, \bar{y})$ nicht angewendet werden ?
(b) Kann dies mit $\bar{c}_1\bar{c}_2 > 0$ passieren ?

Die Jacobi-Matrix $J(x,y) = D_yF(x,y)$ hat in jedem Falle regulär zu sein,

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}_{\text{in } (x,y)} = \begin{pmatrix} ae^{y_1} & x \\ -x & be^{y_2} \end{pmatrix}.$$

Ist sie das in $(\bar{x}, \bar{y})$, kann man den Satz anwenden, weil alle Ableitungen auch stetig sind. (3P). Singulär bedeutet

$$\det J = ab\ e^{y_1+y_2} + x^2 = 0, \quad \text{d.h.,} \quad ab = 0 = x.$$

Der Satz kann also genau dann nicht angewendet werden, wenn $ab = 0 = \bar{x}$.
Form von $\bar{c}$: Dann folgt offenbar

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = F(0, \bar{y}) = \begin{pmatrix} a\ e^{\bar{y}_1} \\ b\ e^{\bar{y}_2} \end{pmatrix} = \bar{c}.$$

(b) Also hat $\bar{c}$ im singulären Fall stets die Form $\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$ bzw. $\bar{c} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \geq 0$.

Aufgabe 3:

(1+3+2 P) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $\bar{x}$ sei eine Lösung von $f(x) = 0$ mit $f'(\bar{x}) \neq 0$.
(a) Warum ist dann $x = \bar{x}$ die einzige Lösung von

$$f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) = 0 \qquad ?$$

Für y nahe $\bar{x}$ sei nun $x = x(y)$ Lösung der Gleichung

$$F(x, y) := f(y) + f'(y)(x - y) = 0.$$

(b) Wieso hat die Funktion $x = x(y)$ in $y = \bar{x}$ die Ableitung Null (nach y) ?
(c) Warum folgt aus (b) für den Fehler der Lösungen $|x(y) - \bar{x}| \leq \frac{1}{2}|y - \bar{x}|$, wenn $|y - \bar{x}|$ klein genug ist ?

Die part. Ableitungen von F nahe $(\bar{x}, \bar{x})$ existieren und sind stetig. Regularität von $D_x F(x, y) = f'(y)$ ist erfuellt; wir wollen x' als Funktion von y in $y = \bar{x}$ bestimmen:

$$x'(\bar{x}) = -D_x F(\bar{x}, \bar{x})^{-1} D_y F(\bar{x}, \bar{x}) = -f'(\bar{x})^{-1}[f'(\bar{x}) + f''(\bar{x})\bar{x} - f'(\bar{x}) - f''(\bar{x})\bar{x}] = 0$$

(c) also ist

$$|x(y) - \bar{x}| = o(y - \bar{x}) \text{ bzw. } \lim_{y \to \bar{x},\ y \neq \bar{x}} \frac{|x(y) - \bar{x}|}{|y - \bar{x}|} = 0.$$

Sum = 6+6+6 = 18 P.

---

6. Serie bis Mo, 23. 5. 2011 ;

Aufgabe 1:

(5 P) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Beweisen Sie, dass dann für beliebige positive $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ gilt:
Aus $x, y, z \in M$ und $u = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z$ folgt $u \in M$.

Man schreibe

$$u = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = (\lambda_1 + \lambda_2) \, \frac{\lambda_1 x + \lambda_2 y}{\lambda_1 + \lambda_2} + \lambda_3 z.$$

Der Punkt

$$a = \frac{\lambda_1 x + \lambda_2 y}{\lambda_1 + \lambda_2} = (\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})\ x \ + \ (\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2})\ y$$

ist wegen Konvexität aus M, da beide Faktoren positiv sind und ihre Summe 1 ist. Daher gilt - aus demselben Grunde - auch

$$u = (\lambda_1 + \lambda_2)\ a \ + \ \lambda_3\ z \ \in M.$$

Aufgabe 2:

(6 P) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f''(x) \geq 0\ \forall x$.
Warum ist dann f konvex ?

Hinweis:
Wenden Sie (z.B.) auf $z = \lambda x + (1-\lambda)y;\ \lambda \in (0,1)$ mit (o.B.d.A.) $x < y$ den Mittelwertsatz für x, z und y, z an und beachten Sie $\lambda f(z) + (1-\lambda)f(z) = f(z)$. Natürlich braucht man $f'' \geq 0$.

Sei $z = \lambda x + (1-\lambda)y;\ \lambda \in (0,1)$. Dann ist nach Mittelwertsatz

$$f(z) = f(x) + f'(\theta_x)(z-x), \qquad f(z) = f(y) + f'(\theta_y)(z-y).$$

mit gewissen $\theta_x \in (x,z)$ und $\theta_y \in (z,y)$.
Addieren der mit λ und $(1-\lambda)$ multiplizierten Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} f(z) &= \lambda\ [\ f(x) + f'(\theta_x)(z-x)\ ] + (1-\lambda)\ [\ f(y) + f'(\theta_y)(z-y)\ ] \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \ + \ \lambda f'(\theta_x)(z-x) \ + \ (1-\lambda)f'(\theta_y)(z-y). \end{aligned}$$

Da $f'' \geq 0$, ist f' monoton (nicht fallend), also wegen $\theta_x < \theta_y$ auch $f'(\theta_x) \leq f'(\theta_y)$ und

$$\lambda f'(\theta_x)(z-x) \leq \lambda f'(\theta_y)(z-x).$$

So folgt mit $a = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ die Behauptung

$$\begin{aligned} f(z) \ &\leq \ a \ + \ \lambda f'(\theta_y)(z-x) \ + \ (1-\lambda)f'(\theta_y)(z-y) \\ &= \ a \ + \ f'(\theta_y)\ [\ \lambda(z-x) + (1-\lambda)(z-y)\ ] \\ &= \ a \ + \ f'(\theta_y)\ [\ z - \lambda x - (1-\lambda)y\ ] \\ &= \ a \ + \ \ 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: Taylor

$$f(z) = f(x) + f'(x)(z-x) + \tfrac{1}{2}f''(\theta_x)(z-x)^2$$

$$f(z) = f(y) + f'(y)(z-y) + \tfrac{1}{2}f''(\theta_y)(z-y)^2$$

führt nicht direkt zum Ziel, auch wenn man zunächst $f(x) = f(y) = 0$ annimmt.

Aufgabe 3:

(4+2 P) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, und es gelte

(1) $f(x) > 0\ \forall x \neq 0$ sowie (2) $f(rx) = |r| f(x)\ \ \forall r \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass dann f eine Norm des $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Warum gibt es keine Norm des $\mathbb{R}^n$, die im Nullpunkt differenzierbar ist ?

(a) Nach (1) und (2) sind offenbar die Norm-Bedingungen

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad f(x) \geq 0, \quad f(rx) = |r| f(x)$$

erfüllt. Bleibt die Dreiecksungleichung: Wegen Konvexität ist

$$f(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y) \leq \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}f(y),$$

mit (2) also auch

$$f(x+y) = f(\ 2\ (\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y)\ ) = 2\ f(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y) \leq f(x) + f(y).$$

(b) Es muss gelten $\|re^1\| = |r|\ \|e^1\|$ mit $\|e^1\| = \|(1,0,..,0)\| > 0$. Dann existiert aber - wie von der Betragsfunktion bekannt- die 1. partielle Ableitung der Norm im Nullpunkt nicht.

Sum = 5+6+6 = 17 P.

---

7. Serie bis Mo, 30. 5. 2011 ;

Aufgabe 1:

(3+3 P) Es sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ g(x,y) = 0\}$ mit $g(x,y) = \sin x - 2x + y^2 = 0$ und $f = f(x,y) \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
(a) Warum gibt es dann für jeden lokalen Minimalpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ der Funktion f bezüglich M einen Lagrange-Multiplikator und
(b) wie sieht die entsprechende Lagrange-Bedingung im konkreten Fall aus ?

(a) Lagr. nach Vorles:

$$Df(\bar{x},\bar{y}) + \lambda Dg(\bar{x},\bar{y}) = 0$$

gilt für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, wenn $(\bar{x},\bar{y})$ lokal minimal. Vorauss. in Vorl. war dabei $\frac{\partial g(\bar{x},\bar{y})}{\partial y} = D_y g(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$, um implizite Funktion $y = y(x)$ zu nutzen. Hier:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \cos x - 2 \neq 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \ \text{ (kann Null werden).}$$

Formal nach Vertauschen von x und y ist also der Satz stets anwendbar.
(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda(\cos x - 2) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + 2\lambda y = 0 \qquad \text{in } (\bar{x},\bar{y}).$$

Wer, wie in vielen Buechern, hier λ durch $-\lambda$ ersetzt, soll trotzdem volle Punkte bekommen.

Aufgabe 2:

(4 P) Warum sind zwei komplexe Polynome $P, Q: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad Q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$$

nur dann gleich, wenn $a_k = b_k \; \forall k$?

aus Vorles. wissen wir: Wenn $a_k - b_k \neq 0$ fuer ein $k > 0$, so folgt $|P(z) - Q(z)| \to \infty$ falls $|z| \to \infty$, also auch $P(z) \neq Q(z)$ für gewisse z. Wenn $a_k = b_k \forall k > 0$, aber $a_0 \neq b_0$ ist offenbar $a_0 = P(z) \neq Q(z) = b_0$.

Aufgabe 3:

(3+3 P)
(a) Was ändert sich an der bekannte Lösungsformel für eine quadratische Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ im Falle komplexer p, q und z gegenüber dem reellen Fall ?
(b) Was ergibt sich für $z^2 + 2iz - i = 0$?

(a) Quadr. Ergaenzung geht auch hier:

$$z^2 + pz + q = (z + p/2)^2 + q - p^2/4,$$

also

$$z + p/2 = \sqrt{p^2/4 - q} \quad \text{mit beiden Wurzeln.}$$

Allerdings entfällt jetzt die Lösbarkeitsbedingung $p^2 - 4q \geq 0$ aus dem reellen Fall.
(b) Ich hoffe ich habe richtig gerechnet: Jetzt ist $p^2/4 - q = -1 + i$, polar ist also $r = |i - 1| = \sqrt{2}$ (reelle Wurzel) und $\varphi = 3\pi/4$. Die beiden Wurzeln werden so zu

$$w_1 = \sqrt[4]{2}\,(\cos(\varphi/2) + i \sin(\varphi/2)), \qquad \text{(reelle Wurzel)}$$

$$w_2 = \sqrt[4]{2}\,(\cos(\pi + \varphi/2) + i \sin(\pi + \varphi/2)).$$

Insgesamt gibt das für die beiden Lösungen der Gleichung

$$z_1 = -i + \sqrt[4]{2}\,(\cos(3\pi/8) + i \sin(3\pi/8)\,).$$

$$z_2 = -i + \sqrt[4]{2}\,(\cos(11\pi/8) + i \sin(11\pi/8)\,).$$

---

8. Serie bis Mo, 6. 6. 2011 ;

Aufgabe 1:

(4+2 P) Es sei $f = (z+i)/z$.
(a) Warum ist f in allen Punkten $z \neq 0$ komplex differenzierbar ?
(b) Warum ist dann $f'(z) = -\frac{i}{z^2}$?

$$f = (z+i)/z, \qquad z = x+iy$$
$$f = (x+iy+i)/(x+iy) = (x+i(y+1))(x-iy)/(x^2+y^2)$$
$$f = (x^2+y(y+1)+ix(y+1)-ixy)/(x^2+y^2) = (x^2+y(y+1)+ix)/(x^2+y^2)$$

Also

$$re = f_1 = \frac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} = 1 + \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad im = f_2 = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2xx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{-2yx}{(x^2+y^2)^2} \qquad CR\ erfuellt.$$

Part. Ableitungen stetig, CR erfüllt; also komplex differenzierbar.

$$f' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + i\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{-2xy + i(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Vereinfachung: Mit $z\bar{z} = x^2+y^2$ und bei Erweitern mit i folgt

$$f' = \frac{x^2-2ixy-y^2}{iz^2\bar{z}^2} = \frac{(x-iy)^2}{iz^2\bar{z}^2} = \frac{\bar{z}^2}{iz^2\bar{z}^2} = -\frac{i}{z^2}.$$

Man kann (hier einfacher) auch direkt den Diff.-Quotienten

$$\lim_{\zeta \to 0,\ \zeta \neq 0} \frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta}$$

ausrechnen:

$$\frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta} = \frac{(z+\zeta+i)/(z+\zeta)-(z+i)/z}{\zeta}$$
$$= \frac{z(z+\zeta+i)-(z+i)(z+\zeta)}{\zeta(z+\zeta)z} = \frac{z^2+z\zeta+iz\ -z^2-iz-z\zeta-i\zeta}{\zeta(z+\zeta)z} = \frac{-i\zeta}{\zeta(z+\zeta)z}$$
$$= \frac{-i}{(z+\zeta)z}$$

Mit Limes $\frac{-i}{(z+\zeta)z} \to -\frac{i}{z^2}$ wegen $z \neq 0$.

Aufgabe 2:

(6 P) Wie sehen alle komplex differenzierbaren Funktion $f = f(x+iy)$ aus, die den Realteil x^2-y^2 besitzen ?

Wegen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -2y$$

muss wegen der CR-Gleichungen gelten

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2y, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2x.$$

Die Ableitungs-Bedingungen werden jeweils genau dann erfüllt wenn

$$f_2 = (2y)x + a(y) \quad \text{bzw.} \quad f_2 = (2x)y + b(x)$$

mit gewissen Funktionen a, b gilt. Dann muss aber auch $a(y) = b(x)$ gelten für alle x und y. Also sind beide Funktionen a, b konstant und gleich

$$a(y) = c = b(x) \in \mathbb{R} \ \ \forall x, y$$

und $f_2 = 2xy + c$. Damit sieht f notwendig so aus:

$$f = x^2 - y^2 + i\ (2xy + c) = z^2 + ic.$$

Die CR -Gleichungen bleiben auch mit $c \neq 0$ erfüllt und die partiellen Ableitungen sind stetig. Also sind diese f tatsächlich komplex differenzierbar.

Aufgabe 3:

(4 P) Warum ist $f(z) = z\bar{z}$ in $z = 0$ komplex differenzierbar ? (wie üblich ist hier $\bar{z}$ die Konjugierte von z, keine Konstante).

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = f_1; \quad f_2 = 0$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y$$

CR in $z = 0$ erfüllt und part.Ableitungen stetig. Also in $z = 0$ komplex diffbar.
Sum = 16 P.

---

9. Serie bis Mi, 15. 6. 2011 ;

Aufgabe 1:

(6 P) Man bestimme $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\ dx = \int \frac{x^2+x-4}{x^3-3x+2}\ dx$ für $Q \neq 0$.

Eine (doppelte) Nullstelle von Q ist $x = 1$. Damit wird

$$Q = (x-1)^2(x+2) = (x^2-2x+1)(x+2) = (x^3-2x^2+x)+(2x^2-4x+2) = x^3-3x+2.$$

mit einfacher Nullstelle $x = -2$. Also Ansatz

$$P/Q = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x+2)},$$

was zu

$$(P =)\ x^2 + x - 4 = A_1(x-1)(x+2) + A_2(x+2) + A_3(x-1)^2,$$

führt. Koeffizientenvergleich

$$\begin{array}{lll} (x^2): & 1 & = A_1 + A_3 \\ (x^1): & 1 & = A_1 + A_2 - 2A_3 \\ (x^0): & -4 & = -2A_1 + 2A_2 + A_3 \end{array}$$

Lösung ist

$$A_1 = 11/9, \quad A_2 = -6/9, \qquad A_3 = -2/9.$$

Probe ok:

$$\begin{array}{lll} (x^2): & 1 & = 11/9 - 2/9 \\ (x^1): & 1 & = 11/9 - 6/9 + 4/9 \\ (x^0): & -4 & = -22/9 - 12/9 - 2/9. \end{array}$$

Folglich

$$P/Q = \frac{11/9}{(x-1)} + \frac{-6/9}{(x-1)^2} + \frac{-2/9}{(x+2)},$$

und - bis auf eine Konstante -

$$\int P/Q\ dx = (11/9)\ln|x-1| + (6/9)(x-1)^{-1} - (2/9)\ln|x+2|.$$

Aufgabe 2:

(3+2 P)
(a) Man bestimme $F(x) = \int \frac{1}{1-x^2}\ dx$ für $x^2 \neq 1$ über den Partialbruchansatz
(b) und zeige:
Wenn $|x| < 1$, so ist $F = \frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$.
Wenn $|x| > 1$, so ist $F = \frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) + c$.

Nullstellen von Q sind $x = \pm 1$. Damit wird

$$Q = (1+x)(1-x).$$

Also Ansatz

$$P/Q = \frac{A_1}{(1+x)} + \frac{A_2}{(1-x)},$$

was zu

$$1 = A_1(1-x) + A_2(1+x),$$

führt. Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lcll} (x^1): & 0 & = & -A_1 + A_2 \\ (x^0): & 1 & = & A_1 + A_2. \end{array}$$

Lösung ist $A_1 = A_2 = 1/2$. Folglich

$$P/Q = \frac{1/2}{(1+x)} + \frac{1/2}{(1-x)}.$$

und - bis auf eine Konstante -

$$F = \tfrac{1}{2} \ [\ \ln|1+x| - \ln|1-x| \ ] = \ \tfrac{1}{2} \ \ln\left(\frac{|1+x|}{|1-x|}\right).$$

Wenn $|x| < 1$, sind $1-x$ und $1+x$ positiv. Dann ist also

$$F = \tfrac{1}{2} \ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Wenn $|x| > 1$, ist $(x-1)(x+1) = x^2 - 1 > 0$. Also haben beide Faktoren dasselbe Vorzeichen, und es folgt $\frac{|1+x|}{|1-x|} = \frac{1+x}{x-1}$ sowie

$$F = \tfrac{1}{2} \ \ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right).$$

Aufgabe 3:

(2+4) Die reelle Gleichung $x^2 + px + q = 0$ habe keine reelle Lösung.
(a) Warum vereinfacht dann Partialbruchzerlegung für $\int \frac{1}{x^2+px+q} \ dx$ das Problem nicht ?
(b) Geben Sie eine Stammfunktion an.

(a) Also Ansatz

$$P/Q = \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}$$

was zu

$$1 = Bx + C,$$

führt. Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lcll} (x^1): & 0 & = & B \\ (x^0): & 1 & = & C. \end{array}$$

Folglich ergibt

$$P/Q = \frac{1}{x^2 + px + q}$$

keine Vereinfachung.

(b) $\int \frac{1}{x^2+px+q}\ dx = \int \frac{1}{(x+p/2)^2+(q-p^2/4)}\ dx$. Hier ist $q - p^2/4 > 0$, da es keine reelle Nullstelle gibt. Wir setzen

$$\beta^2 = q - p^2/4, \quad (\beta > 0).$$

Damit wird

$$I := \int \frac{1}{x^2+px+q}\ dx = \int \frac{1}{(x+p/2)^2+\beta^2}\ dx = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{1}{(\frac{x+p/2}{\beta})^2+1}\ dx$$

und nach Substitution $u = \frac{x+p/2}{\beta}, \ \ dx = \beta\ du$,

$$I = \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{u^2+1}\ du = \frac{1}{\beta}\arctan u = \frac{1}{\beta}\arctan(\frac{x+p/2}{\beta}).$$

Sum = 17 P.

---

10. Serie bis Mo, 20. 6. 2011 ;

Aufgabe 1:

(6 P) Es sei $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $f(x,y) = x + x^3 + \sqrt{1-y^2}$. Berechnen Sie das Integral

$$J = \iint\limits_G f(x,y)\ dxdy$$

durch äussere Integration über y_{min} und y_{max} (ist einfacher als über x_{min} und x_{max}).

Es ist $y_{min} = -1, \ y_{max} = 1$, und $(x,y) \in G$ bedeutet $x \in [x_1(y), x_2(y)]$ mit $x_1(y) = -\frac{1}{2}\sqrt{1-y^2}, \ x_2(y) = +\frac{1}{2}\sqrt{1-y^2} = -x_1(y)$. Damit wird

$$J = \int_{y_{min}}^{y_{max}} \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} (\ x + x^3 + \sqrt{1-y^2}\ )\ dx\right]\ dy.$$

D.h. wegen Symmtrie von x^2 und x^4 und $x_1 = -x_2$

$$J = \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \sqrt{1-y^2}\ x\ \right]_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\ \sqrt{1-y^2}\ dy = \int_{-1}^{1} (1-y^2)\ dy$$

$$J = \left[y - \frac{y^3}{3}\ \right]_{-1}^{1} = 2 - (1/3 - (-1/3)) = \frac{4}{3}.$$

Bemerkung:
Mit dem anderem Ansatz $x_{min} = -\frac{1}{2},\ x_{max} = \frac{1}{2}$, und $y \in [y_1(x), y_2(x)]$ mit $y_1(x) = -\sqrt{1-4x^2}, \quad y_2(x) = +\sqrt{1-4x^2} = -y_1(x)$ wird

$$J = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (\ x + x^3 + \sqrt{1-y^2}\ )\ dy\right]\ dx\ = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \sqrt{1-y^2} dy\ \right]\ dx$$

Hier muss man (wahrscheinlich zweimal) substituieren. Zuerst für innen:

$$y = \sin t,\ -\pi/2 \le t \le \pi/2,\ dy = \cos t\ dt,\ \sqrt{1-y^2} = \cos t, \quad y_i \text{ wird } t_i = \arcsin y_i$$

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \sqrt{1-y^2} dy = \int_{t_1(x)}^{t_2(x)} \cos^2 dt = \tfrac{1}{2}[t + \sin t \cos t]_{t_1(x)}^{t_2(x)}$$

Damit verschwindet aber $\arcsin y_i$ noch nicht.

Aufgabe 2:

(6 P) Man bestimme für die geschlossene Rechteck-kurve $K \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ über $(1,0)$ zu $(1,1)$, $(0,1)$ und $(0,0)$ das Integral

$$J = \int_K P\ dx\ + Q\ dy \qquad \text{wobei } P = Q = x^2 - y.$$

Zerlegen Sie dazu K in die 4 Einzelteile $K_1, ..., K_4$ und betrachten Sie

$$J_i = \int_{K_i} P\ dx\ + Q\ dy.$$

Einzelintegrale: je 1P, alles richtig zusammengepackt: 2P.
Auf K_1 und K_3 variiert y nicht. Also gilt nach Definition des Kurvenintegrals

$$J_1 = \int_{K_1} P\ dx = \int_{K_1} (x^2 - 0)\ dx = \int_0^1 x^2\ dx = \frac{1}{3}$$

$$J_3 = \int_{K_3} P\ dx = \int_{K_3} (x^2 - 1)\ dx = \int_1^0 (x^2 - 1)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^0 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Auf K_2 und K_4 variiert x nicht. Also gilt

$$J_2 = \int_{K_2} Q\ dy = \int_{K_2} (x^2 - y)\ dy = \int_0^1 (1 - y)\ dy = \left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

$$J_4 = \int_{K_4} Q\ dy = \int_{K_4} (x^2 - y)\ dy = \int_1^0 (0 - y)\ dy = \left[-\frac{y^2}{2}\right]_1^0 = \frac{1}{2}.$$

Damit folgt $J = J_1 + ... + J_4 = 2$.

Aufgabe 3:

(Wiederholung und nahe Zukunft) Analysieren Sie Stetigkeit (2P) und Differenzierbarkeit (3P) der Funktion F mit

$$F(y) = \int_0^y \sin(xy)\ dx, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

im Nullpunkt.

$F(0) = 0$. Ansonsten ist (mit explizitem Ausrechnen)
$F(y) = [-y^{-1}\cos(xy)]_0^y = -y^{-1}\cos(y^2) - (-y^{-1}\cos(0)) = y^{-1}(1 - \cos(y^2))$ und somit

$$F(y) = y\ \frac{1 - \cos(y^2)}{y^2}.$$

Der Limes $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t} = 0$ ist bekannt (aus Berechnung der Ableitung des sinus)
Mit $t = y^2$ folgt dann $\lim_{y\to 0} F(y) = 0$ und wegen Faktor y auch Differenzierbarkeit im Nullpunkt, da $\lim_{y\to 0, y\neq 0} \frac{F(y)-F(0)}{y} = 0$.

Eleganter sind natürlich die Abschätzungen

$$|F(y)| \leq \int_0^{|y|} 1\ dx = |y|$$

und, wenn $|y|$ schon so klein ist, dass $|\sin(xy)| \leq \varepsilon\ \forall x$ mit $|x| \leq |y|$:

$$|F(y)| \leq \int_0^{|y|} \varepsilon dx = |y|\varepsilon,$$

was auch $F'(0) = 0$ liefert.

---

11. Serie bis Mo, 27. 6. 2011 ;

Aufgabe 1:

(3+2 P) Bestimmen Sie eine Lösung $y = y(x)$ der DGL

$$y' = (1 + x)(y^2 + 1) \qquad \text{mit} \ \ y(0) = 1$$

und deren Definitionsbereich.

$\frac{dy}{y^2+1} = (1+x)dx$
$\arctan y = c + \int(1+x)dx = c + x + \frac{x^2}{2}$
$y = \tan(c + x + \frac{x^2}{2});$ $\quad 1 = y(0) = \tan c;$ $\quad c = \pi/4$ (im Hauptbereich)
Def. Bereich: $\; -\pi/2 < c + x + \frac{x^2}{2} < \pi/2;$ $\quad -3\pi/4 < x + \frac{x^2}{2} < \pi/4;$
also $\; -3\pi/2 < 2x + x^2 < \pi/2;$
Die linke Ungl. gilt immer. Also bleibt $\; 2x + x^2 - \pi/2 < 0,$ d.h.,
$-1 - \sqrt{1+\pi/2} = a < x < b = -1 + \sqrt{1+\pi/2}.$

Es gibt mind. eine weitere Lösung, da Riccati-Gleichung. Mit Ansatz $z = y + v$ zu finden. Aber das Integral wird haesslich; deshalb wird nicht danach gefragt.

Aufgabe 2:

(2+4 P)

(a) Finden Sie eine Lösung der DGL

$$\frac{dx}{dt} = 2tx, \qquad x(0) = 1.$$

(b) Beginnend mit der Funktion $x_1(t) = 1 \; \forall t$ berechne man - mit gegebener Funktion x_k - die neue Funktion

$$x_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t 2s \; x_k(s)ds.$$

Welche Funktionenfolge erhält man und was hat sie mit Ihrer Lösung zu tun ?

(a) Variablentrennung: $\quad x(t) = e^{t^2}, \;\; x' = 2te^{t^2} = 2tx(t).$

(b)

$x_2(t) = 1 + \int_0^t 2sx_1(s)\; ds = 1 + \int_0^t 2s\; ds = 1 + t^2.$
$x_3(t) = 1 + \int_0^t 2sx_2(s)\; ds = 1 + \int_0^t 2s(1+s^2)\; ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2},$
Mit

$$x_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + ... + \frac{(t^2)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{4}$$

kommt jeweils das Integral

$$\int_0^t 2s\frac{(s^2)^{k-1}}{(k-1)!}\; ds = \int_0^t 2s\frac{s^{2(k-1)}}{(k-1)!}\; ds = \int_0^t 2\frac{s^{2k-1}}{(k-1)!}\; ds = 2\frac{t^{2k}}{2k(k-1)!} = \frac{(t^2)^k}{k!}$$

zur Summe hinzu. Damit folgt

$$x_{k+1}(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + ... + \frac{(t^2)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(t^2)^k}{k!} \tag{5}$$

also gilt (4) per Induktion. Das liefert die Potenzreihe zur Lösung

$$e^{(t^2)} = \sum_{k\geq 0} \frac{(t^2)^k}{k!}.$$

Aufgabe 3:

(Wiederholung und nahe Zukunft) (3+3 P) Warum besitzt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy + x^2 + \alpha\,\frac{y^2}{2}$$

für $0 < \alpha < 1/2$ und $\alpha > 1/2$ lokale Minima ? Wo liegen diese Minimalstellen ?

1. Ordnung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - y + 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + \alpha\, y.$$

$$x = \alpha y \quad \alpha^2 y^2 - y + 2\alpha y = 0, \quad \alpha^2 y^2 + (2\alpha - 1)y = y(\alpha^2 y + (2\alpha - 1) = 0,$$

$$y = -(2\alpha - 1)/\alpha^2,\ x = -(2\alpha - 1)/\alpha, \ \text{ und } \ y = x = 0 \text{ sind Kandidaten}$$

2. Ordnung:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + 2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha$$

$$\text{Fall 2} \quad x = 0; \quad H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{pos. definit falls } \alpha > 1/2$$

$$\text{Fall 1} \quad x = -(2\alpha - 1)/\alpha; \quad H = \begin{pmatrix} 2 - 2(2\alpha - 1)/\alpha & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

Es reicht -fuer posit. Definitheit- zu haben: $\alpha > 0$, $2 - 2(2\alpha - 1)/\alpha > 0$ und $\det H > 0$ (Hauptminoren posit. oder mittels Eigenwerten). Sei also $\alpha > 0$.

$$2 - 2(2\alpha - 1)/\alpha > 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 2(2\alpha - 1) > 0 \Leftrightarrow -2\alpha + 2 > 0 \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

$$\det H = -1 + 2\alpha - 2(2\alpha - 1) > 0 \quad \text{ heisst}$$

$$1 < 2\alpha - 2(2\alpha - 1) = -2\alpha + 2; \qquad \alpha < 1/2.$$

Sum = 17 P.

---

12. Serie bis Mo, 4. 7. 2011 ;

Aufgabe 1:

(4 P) Es sei $y = y(x)$ eine beliebige Lösung der DGL

$$y'' + Ay' + By = \sin x; \qquad A, B \in \mathbb{R} \text{ konstant} \tag{6}$$

Warum existiert dann die Ableitung $y^{(k)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$?

y'' existiert, und es gilt $y'' = \sin x - By - Ay'$. Da die Ableitung rechts existiert, existiert sie auch links. Also gibt es

$$y''' = \cos x - By' - Ay''.$$

Damit existiert wieder die Ableitung rechts usw. ...

Wer gleich in (6) losdifferenziert unter dem Motto rechts diffb. also auch links diffb., deshalb

$$y''' + Ay'' + By' = \cos x$$

muss noch erklären, warum es y''' gibt. Denn wenn allgemein $u+v$ diffb. ist, müssen es nicht u und v sein. Hier ist allerdings $v = Ay' + By$ ebenfalls diffb. und deshalb auch $u = y''$. Das läuft aber ebenfalls auf Auflösen von (6) nach y'' hinaus wie oben.

Aufgabe 2:

(6 + 1 P) Wir betrachten die homogene DGL zu (6),

$$y'' + Ay' + By = 0; \qquad A, B \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \tag{7}$$

Die Gleichung $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$ habe die konjugiert-komplexe Lösung $\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta i$. Zeigen Sie:

a) Dann lösen die folgenden Funktionen y_1 und y_2 beide (7):

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

(b) Was folgt mit $\beta = 0$?

(a) Aus der quadr. Gleich. folgt mit λ_1 , $\quad \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta + A(\alpha + i\beta) + B = 0;$

$$\text{also } \ \alpha^2 - \beta^2 + A\alpha + B = 0 \ \text{ und } 2\alpha\beta + A\beta = 0.$$

Einsetzen von y_1 in (7):

$$\begin{aligned}
y_1'(x) &= \alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) & &- \beta e^{\alpha x}\sin(\beta x)\\
y_1''(x) &= \alpha^2 e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \alpha\beta e^{\alpha x}\sin(\beta x) & &- [\alpha\beta e^{\alpha x}\sin(\beta x) + \beta^2 e^{\alpha x}\cos(\beta x)]\\
&= \alpha^2 e^{\alpha x}\cos(\beta x) - 2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin(\beta x) & &- \beta^2 e^{\alpha x}\cos(\beta x)]
\end{aligned}$$

Man beachte $e^{\alpha x} \neq 0$. Damit wird

$$e^{-\alpha x}\ [y_1'' + Ay_1' + By_1] = \cos(\beta x)\ [\alpha^2 - \beta^2 + A\alpha + B]\ +\ \sin(\beta x)\ [-2\alpha\beta - A\beta]\ = 0.$$

Dasselbe für y_2:

$$\begin{aligned}
y_2'(x) &= \alpha e^{\alpha x}\sin(\beta x) & &+ \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x)\\
y_2''(x) &= \alpha^2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + \alpha\beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) & &+ [\alpha\beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta^2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)]\\
&= \alpha^2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + 2\alpha\beta e^{\alpha x}\cos(\beta x) & &-\beta^2 e^{\alpha x}\sin(\beta x).
\end{aligned}$$

$$e^{-\alpha x}\ [y_2'' + Ay_2' + By_2] = \cos(\beta x)\ [2\alpha\beta + A\beta]\ + \sin(\beta x)\ [\alpha^2 - \beta^2 + A\alpha + B]\ = 0.$$

(b) Die Studenten sollen einfach nur sehen, dass dann $y_1 = e^{\alpha x}$ und $y_2 = 0$ folgt, also der Standard-Fall einer reellen Lösung (noch nicht besprochen) enthalten ist.

Aufgabe 3:

(4+2 P) (Wiederholung und nahe Zukunft)
(a) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die in keinem Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ stetig, aber in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist.
Begründen Sie, warum beide Eigenschaften erfüllt sind.
(Hinweis: Benutzen Sie z.B. die Idee der Dirichlet-Funktion).
(b) Gibt es ein solches Beispiel auch für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(a) Z.B. $f(x,y) = 0$, wenn x oder y rational (Menge M_1); $f(x,y) = 1$ sonst (Menge M_2). Da alle Elemente von M_1 Limes von Elementen aus M_2 sind und umgekehrt, kann f nirgends stetig sein. Die partiellen Ableitungen im Nullpunkt existieren und sind beide Null, weil f auf den Koordinatenachsen Null ist.
(b) Jetzt ist partiell diffb. = differenzierbar. Also ist f zumindest in 0 stetig.

Sum = 17 P.

---

13. Serie bis Mo, 11. 7. 2011 ;

Für reelle Funkt. $y = y(x)$ mit stetigen 2. Ableitungen sei $L(y)$ die Funktion

$$L(y) = y'' + 4y' - 5y.$$

Aufgabe 1:

(3+2 P)
(a) Für welche reellen Konstanten a und λ definiert $y(x) = ae^{\lambda x}$ eine Lösung der DGL

$$L(y) = 0 \qquad \text{mit} \quad y(0) \neq 0 \ ?$$

Offenbar muss $a \neq 0$ sein. Man rechnet aus

$$y' = a\lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = a\lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$0 = y'' + 4y' - 5y = ae^{\lambda x}\ (\lambda^2 + 4\lambda - 5)$$

also $\lambda = \lambda_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4+5}, \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -5.$

(b) Beweisen Sie:
Wenn $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ beide $L(y) = 0$ erfüllen, so auch jede Funktion

$$y = ay_1 + by_2, \quad a, b \quad \text{reell.}$$

Einsetzen und differenzieren.

Aufgabe 2:

(3 + 2 P)
(a) Nutzen Sie (a) und (b) aus Aufgabe 1, um eine Lösung von $L(y) = 0$ zu bestimmen, die den Anfangsbedingungen $y(1) = 1,\ y'(1) = 2$ genügt.

(b) 2 P Warum gibt es keine Lösung von $L(y) = 0$ bis auf die Nullfunktion, die ein lokales Maximum mit $y(x_0) \geq 0$ besitzt ?

(a) Zu erkennen: $L(y) = 0$ wird erfüllt von $y = ae^x + \ be^{-5x}$ womit $y' = ae^x - 5be^{-5x}$, $y(1) = ae + \ b\ e^{-5}$ sowie $y'(1) = ae - 5be^{-5}$ folgt. Damit muss gelten

$$1/e = a + \ b\ e^{-6}, \quad 2/e = a - \ 5b\ e^{-6}; \qquad a = \frac{7}{6}e^{-1}, \quad b = -\frac{1}{6}e^5.$$

(b) Es müsste dort $y'(x_0) = 0$ sein, also auch $y''(x_0) = 5y(x_0) \leq 0$. Sind beide Null, hat die DGL neben der Nullfunktion noch die Funktion y als Lösung zum Anfangswert $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$, was dem Existenz-und Eindeutigkeitssatz widerspricht. Der Fall $y''(x_0) = 5y(x_0) < 0$ ist ausgeschlossen.

Aufgabe 3:

5 P Es seien $u_1, ..., u_n$ Funktionen eines Fundamentalsystems zum linearen (n, n)-System $x' = Ax$. Man bilde mit den Komponenten $u_{i,k}$ der Funktionen $u_i = u_i(t)$ die Matrix

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_{1,1}(t), ..., u_{n,1}(t) \\ ..... \\ u_{1,n}(t), ..., u_{n,n}(t) \end{pmatrix}.$$

Warum ist dann die (Wronski-) Determinante $\det W(t)$ für kein t Null ?
(Hinweis: Versuchen Sie einen indirekten Beweis und nutzen Sie den Existenz-und Eindeutigkeitssatz).

Sonst gibt es ein t_0 mit $\det W(t_0) = 0$. Also gibt es dann auch (s. lin. Gleich. Systeme im $\mathbb{R}^n$) ein $c = (c_1, ...c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ (nicht Null) mit $W(t_0)c = 0$. Das bedeutet fuer die Funktion

$$u = u_1c_1 + ... + u_nc_n\ ,$$

(weil die u_i ein lin. unabh. System von Funktionen bilden) dass sie irgendwo nicht Null ist, wohl aber in $t = t_0$. Dann hätte aber das System $x' = Ax$ mit Anfangsbedingung $x(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen: u (nicht überall Null) und die Nullfunktion, entgegen dem Exist. und Eind. Satz.

Sum = 15 P.
Viel Erfolg für Klausuren, Prüfungen und darüber hinaus !