Übungen, Einführung in die Spieltheorie, WiSem 2011/12

Bernd Kummer

Bitte Übungsblätter stets mit Namen und HS-Nummer versehen.

9. Serie bis Do, 12. 1. 2012 ; 15.00 Uhr

Spiele mit gemeisamen constraints.
Es sei ein n-Personenspiel mit Gewinnfunktionen f_i und Strategiemengen X_i ($i = 1, ..., n$) gegeben, das den Voraussetzungen des Nash- Satzes für die Existenz von GGSituationen genügt. Auf $X = X_1 \times ... \times X_n$ sei eine konvexe, stetige Funktion g definiert, die die zulässigen Situationen x auf die Menge

$$X(g) = \{x \in X \mid g(x) \leq 0\}$$

beschränkt. Eine GGS $\bar{x} \in X(g)$ sei nun definiert durch die Bedingungen

$$\text{für alle } i: \quad f_i(\bar{x}//\xi_i) \leq f_i(\bar{x}) \ \ \forall \xi_i \in X_i \text{ mit } g(\bar{x}//\xi_i) \leq 0. \tag{1}$$

Sei weiter, für $x, y \in X(g)$,

$$\varphi(x, y) = \sum_i f_i(x//y_i) \quad \text{und} \quad F(x) = \operatorname{argmax}_{y \in X(g)} \varphi(x, y).$$

1. (4P) Zeigen Sie, dass dann aus $\bar{x} \in F(\bar{x})$ die GG-Eigenschaft (1) folgt.

2. Es sei speziell

$$n = 2, \ X_i = [0, 1] \subset \mathbb{R}, \ f_1(x) = f_2(x) = x_1 x_2 \ \text{ und } g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1.$$

Geben Sie einen Fixpunkt von F an (1P) und zeigen Sie, dass dieses Spiel eine GGS (1) besitzt, die kein Fixpunkt von F ist (3P).

sum 8 P. Viel Erfolg.

Ergänzung:
Bemerkung 1 zum Satz über Core und balancierte Spiele:
Wir haben definiert für $I = \{\mathbf{1}, ..., n$ und superadditive charakteristische Funktion v mit $v(\{i\}) = 0, \ v(I) = 1$,

$$x \in C \Leftrightarrow x \geq 0, \ \sum x_i \leq 1, \ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ wenn } S \subset I, \ 1 < |S| < n. \tag{2}$$

Das Ungl.System wurde mit konstanter Zielfunktion $0^T x$ als lin. Opt. Aufgabe aufgefasst (min; bei max kommt auch das Richtige heraus). Dann ist $C \neq \emptyset$ genau dann, wenn sie lösbar ist (trivial mit Optimalwert Null). Dies ist genau dann der Fall, wenn die Dualaufgabe den Optimalwert Null besitzt. Sie hat mit Variablen $y(S), y(I)$ wegen der Orientierung der Ungleichungen die Form

$$(D) \qquad \begin{array}{c} \max\ y(I) + \sum v(S)y(S), \\ y(I) + \sum_{S:i\in S} y(S) \leq 0 \quad \forall i, \qquad y(I) \leq 0,\ y(S) \geq 0\ \forall S. \end{array}$$

Zulässige Punkte existieren (zB. Null), also ist (D) lösbar $\Leftrightarrow$ Zielfunktion ≤ 0 für alle zulässigen Punkte. D.h. $C \neq \emptyset$ genau dann, wenn

$$\sum_S v(S)y(S) \leq -y(I) \text{ folgt aus Vorz.bed. und } \sum_{S:i\in S} y(S) \leq -y(I)\ \forall i. \tag{3}$$

So weit waren wir in der Vorlesung. Wenn $y(I) = 0$, ist das trivial, weil $y(S) = 0$ folgt. Wenn (3) mit $-y(I) > 0$ gilt, so auch mit $-y(I) = 1$ und umgekehrt. Also ist $C \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$\sum_S v(S)y(S) \leq 1 \text{ folgt aus Vorz.bed. und } \sum_{S:i\in S} y(S) \leq 1\ \forall i. \tag{4}$$

Man beachte $1 < |S| < n$. Mit Hilfsvariablen $y\{i\} \geq 0$ wird das wegen $v(\{i\}) = 0$ zu: $C \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$\sum_i v(\{i\})y\{i\} + \sum_S v(S)y(S) \leq 1 \text{ folgt aus } y(S) \geq 0 \text{ und } y\{i\} + \sum_{S:i\in S} y(S) = 1\ \forall i.$$

Damit erfassen wir alle Koalitionen S mit $1 \leq |S| < n$ und erhalten: $C \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$\sum_S v(S)y(S) \leq 1 \text{ folgt aus } y(S) \geq 0 \text{ und } \sum_{S:i\in S} y(S) = 1\ \forall i. \tag{5}$$

Hier reicht es, nur S mit $y(S) > 0$ zu betrachten. Sie bilden mit y gerade ein balanciertes Mengensystem. $\square$

Bemerkung 2: Der Beweis wird kürzer, wenn man schreibt

$$x \in C \Leftrightarrow \sum x_i \leq 1,\ \sum_{i\in S} x_i \geq v(S) \text{ wenn } S \subset I,\ 1 \leq |S| < n. \tag{6}$$

Jetzt steckt $x \geq 0$ in den Bedingungen zu $|S| = 1$ und man erhält in der Dualaufgabe (D) (da x_i beliebig) sofort Gleichungen $y(I) + \sum_{S:i\in S} y(S) = 0$, was die Hilfsvariablen erspart.

Summary bisher:
Do 20. 10. 11
Einführung: nicht-kooperativ: Nash-Gleichgewicht, antagonistische Spiele, Sattelpunkt, Eigenschaften von GGS, Haeftlingsdilemma, Familienstreit. kooperativ: Aufteilung des Gewinns. Char. Funktion v(K) superadditiv, n=3 Abstimmung, "besser"

für Koalit K. NM-Lösung als Menge von Gewinnverteilungen. M= (1/2,1/2,0), usw. symm.Lösung.

Mo 24. 10. 11
Weiterführen bis ... core und Existenz einer NM Lösung.
Beispiel Marktmodelle: Walras (Güterbündel und -sinnvoller- Preis).
Beginn Matrixspiel: gemischte Strategie und resultierende GGS- Bedingung.

Do 27. 10. 11
LINOPT $---->$ Matrixspiel:
Dualitaets- und Existenzsatz; die Max- Min- Aufgaben für beide Spiele als lösbare Dualaufgaben.

Mo 31. 10. 11
Matrixspiel $---->$ LINOPT:
Schiefsymmetrische Spiele (Wert =0, optimal für Sp.1 = optimal für Sp. 2, $Ax \leq 0$.
Satz von J. Robinson für $A = -A^T$ (per vollst. Induktion).

Do 03. 11. 11
Modifiziertes Rob. Verfahren.
Lösung von LINOPT über ein schiefsymmetrisches Matrixspiel
Matrixspiel und (Kakutani-) Fixpunkte (in Ueb.).

Mo 07. 11. 11
Existenzsatz von Nash mittels Kakutani's Fixpunktsatz. Vorbereitung des Beweises von Brouwer's Fixp.Satz (Simplexunterteilung).

Do 10. 11. 11
Sperners Lemma und Beweis des Brouwer Satzes.

Mo 14. 11. 11
Äquivalenz des Brouwer-Satzes zum Arbeitslemma, zum Retraktsatz und Beweis des Kakutani - Satzes für die Euklidische Kugel.

Do 17. 11. 11
Erweiterung auf konv., komp. Mengen.
Existenzsatz für Variationsungleichungen (wieder mit Zerlegung der Einheit):
Gegeben

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n.$$

$$\text{Finde } \bar{x} \in M \text{ so dass } \langle f(\bar{x}), y - x\rangle \leq 0 \ \forall y \in M. \tag{7}$$

Interpretation von (7), wenn $f = Dh$ eine Ableitung ist:
Notwend. Bed. für $\bar{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M}$
Wenn ausserdem h konkav ist:
Notwend. + hinr. Bed. für $\bar{x} \in \operatorname{argmax}_{x \in M}$

Für GGSituationen: f besteht aus Gradienten zweier Funktionen $(f_1,\ f_2)$.

Mo 21. 11. 11
Spiele mit vollst. Information, lokal beschränkt, lokal endlich. Nimmspiele bis Gewinn-Verlust-Zerlegung und Def. Summenspiel.

Do 24. 11. 11
Lösung des Summenspiels mittels Grundy-Funktion. Fan-Tan der Ordnung p und Satz von Moore.

Mo 28. 11. 11
Sätze von Moore und Grundy in Anwendung auf die Grundy-Funktion.
Beginn: Nash-Verhandlungslösung.

Do 01. 12. 11
weiter: Nash-Verhandlungslösung. Drohungen im Bimatrixspiel.

Do 08. 12. 11
Balancierte Spiele und core

Do 15. 12. 11
Dualität, KKT Bedingungen und Regularitätsbedingung MFCQ.

Mo 02. 01. 12
Kojima-System statt KKT, um ein (einfaches nichtglattes) Gleichungssystem betrachten zu können. Probleme mit Variablenanzahl bei GGS mit gemeinsamen Restriktionen für die Strategien und spezieller Fixpunktansatz.