

ÜBUNGSAUFGABEN

Numerische Mathematik

Serie 6 – (Abgabe bis 05.06.03)

1. Die Funktion $f(t) = \cos t$ soll auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ interpoliert werden.

a) Die Interpolationspunkte sind $t_0 = 0, t_1 = \frac{\pi}{4}$ und $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Berechnen Sie das quadratische Interpolationspolynom $p_2(f)$ und leiten Sie eine möglichst gute Abschätzung für den maximalen Interpolationsfehler $|f - p_2(f)|_\infty$ her.

b) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ seien $n + 1$ paarweise verschiedene Stützstellen $t_0^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ gegeben und $p_n(f)$ sei das zugehörige Interpolationspolynom.

Man zeige, falls $\max |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, daß die Folge $\{p_n(f)\}$ gleichmäßig auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ gegen f konvergiert (d.h. $|f - p_n(f)|_\infty \rightarrow 0$).

5 Punkte

2. Gegeben sei $f \in C[a, b]$ und eine Zerlegung Π_n des Intervalles $[a, b]$

$$\Pi_n : a = t_0 < t_1^{(n)} < \dots < t_{n-1}^{(n)} < t_n = b.$$

S_n sei ein interpolierender kubischer Spline der Funktion f auf der Zerlegung Π_n .

Zeigen Sie (evtl. mit weiteren Voraussetzungen (aber $f \in C[a, b]!$)), dass

$$|f - S_n|_\infty \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

5 Punkte

3. Sehen Sie sich unter `/usr/local/java/Numerik` das Demonstrationsprogramm `demo (- Interpolation)` an, und testen Sie mit verschiedenen Parametern die Polynom- und Splineinterpolation der Runge-Funktion und der Sinus-Funktion.

4. Sehen Sie sich das Applet zur Polynom- und Splineinterpolation an (Übungsaufgaben/Praktika \rightarrow Numerische Mathematik \rightarrow Applets) und benutzen Sie speziell die Möglichkeit die Punkte zu bewegen.

5. **Praktikum** zum 5.6.03

Berechnen Sie die Interpolierende einer Funktion $y = f(t)$, $t \in [a, b]$ auf einem äquidistantem Gitter mit N Teilintervallen. Geben Sie zur graphischen Weiterverarbeitung die Ergebnisse in ein File aus (z.B. mit HUMath.FileWrite).

Wählen Sie eine der Funktionen aus:

1. $y = \text{abs}(t)$, $t \in [-1, 1]$
 2. $y = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $t \in [-3, 3]$
 3. $y = \sin t$, $t \in [-\pi, \pi]$
 4. $y = \ln t$, $t \in [1/100, 10]$
 5. $y = \cosh t$, $t \in [0, 2]$ (Klasse Sfun in Package JNL)
- } $N = 4, 7, 10$

Implementieren Sie entweder

a.) das Newtonsche Interpolationspolynom **und** benutzen Sie die Klasse POddSplineCreator aus dem Paket J_Spline zur Berechnung eines kubischen Interpolationssplines. Vergleichen Sie graphisch (z.B. mittels gnuplot) beide Interpolierenden mit der exakten Funktion. Stellen Sie dazu auch die Differenz beider Funktionen mit der exakten graphisch dar.

oder

b.) den natürlichen kubischen Interpolationsspline. Benutzen Sie zur Lösung des linearen Gleichungssystems Klassen und Methoden aus dem Paket Jama. Vergleichen Sie graphisch (z.B. mittels gnuplot) die Interpolierende mit der exakten Funktion. Stellen Sie dazu auch die Differenz beider Funktionen mit der exakten graphisch dar.