Humboldt-Universität zu Berlin 4.6.2003
Math.-Nat. Fakultät II
Institut für Mathematik – Angewandte Mathematik
Dr. R. Lamour - A. Backes

Übungsaufgaben
Numerische Mathematik

Serie 7 – (Abgabe bis 19. 06. 03)

---

1. Konstruieren Sie eine Quadraturformel $Q(f)$ für $\int\limits_0^1 f(t)dt$, indem Sie f durch ein Polynom p möglichst niedrigen Grades ersetzen, das die Eigenschaften

$$p(0) = f(0), \quad p'(z) = f'(z), \quad p(1) = f(1)$$

   für ein $z \in [0,1]$ besitzt.
   Ist eine solche Konstruktion immer möglich?
   Warum werden Polynome vom Höchstgrad 2 mittels $Q(f)$ exakt integriert?
   Kann man durch die Wahl von z erreichen, dass auch Polynome vom Grad 3 exakt integriert werden? (8 Punkte)

2. Sehen Sie sich, nachdem in der Vorlesung behandelt, unter /usr/local/java/Numerik mit dem Demonstrationsprogramm demo (- Integration) das Romberg-Verfahren an.

3. **Praktikum**:
   Implementieren Sie eine Quadraturformel für beliebige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Wählen Sie eine der folgenden Quadraturformeln aus:

   Entweder

   a.) die zusammengesetzte (iterierte) Newton-Cotes-Formel mit Genauigkeitsvorgabe und Intervallhalbierung:

   (a) Trapezregel (*für Loginnamen beginnend mit a - i*) oder
   (b) Simpson-Regel (*für Loginnamen beginnend mit j - m*) oder
   (c) 3/8-Regel (*für Loginnamen beginnend mit n - z*)

   oder

   b.) die Gauss-(Legendre)-Formeln auf dem Intervall [0,1] mit den Stützstellen t_j mit den Koeffizienten A_j

A_j			t_j		
1			1/2		
1/2	1/2		$1/2 - \sqrt{3}/6$	$1/2 + \sqrt{3}/6$	
5/18	8/18	5/18	$1/2 - \sqrt{15}/10$	1/2	$1/2 + \sqrt{15}/10$

   für beliebige Intervalle mit einem Genauigkeitsvergleich zwischen den drei Gauss-(Legendre)-Formeln.

Wählen Sie eines der angegebenen Beispiele aus.

Beispiele:

$Nr.$	$Intervall$	$Integrand$	$Parameter$	$exakterWert$
1	$[0, 1]$	$\frac{1}{1+kx^2}$	k	$\frac{\arctan \sqrt{k}}{\sqrt{k}}$
2	$[0, 1]$	$x^{p/q}$	$p \neq q$, natürlich	$\frac{q}{p+q}$
3	$[-1, 1]$	$\lvert x + \frac{1}{2} \rvert^{\frac{1}{2}}$	$-$	1.460447...
4	$[-9, 100]$	$\lvert x \rvert^{-\frac{1}{2}}$	$-$	26
5	$[0, 2.1]$	$e^{x^2} \sin(e^{x^2})$	$-$	0.6719336...
6	$[0, 10]$	$25e^{-25x}$	$-$	$1 - e^{-250}$
7	$[0, 1]$	$\frac{2}{2+\sin(10\pi x)}$	$-$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
8	$[0, 1]$	$\sqrt{t} \sin t$	$-$	$-$