Übungsblatt 1

Analysis II* SoSe 2016

Abgabe: 26.4.2016

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^+, d)$ für $d\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $d(x,y) = \left|\log\left(\frac{y}{x}\right)\right|$ ein metrischer Raum ist.

b) Wir betrachten den Raum

$$\ell^1 = \left\{ \mathbb{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $d_1\colon \ell^1 \times \ell^1 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$d_1(\mathbb{x}, \mathbb{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$$

eine Metrik auf ℓ^1 definiert.

Aufgabe 2 (5+4+1 Punkte)

a) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Wir definieren $\hat{d}\colon X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$\hat{d}(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}.$$

Zeigen Sie, dass dann $(X, \hat{d})$ ein metrischer Raum ist. Beschreiben Sie die ε-Kugeln dieses Raumes durch die von (X,d).

b) Seien (X_i, d_i) $(i = 1,2)$ metrische Räume und sei $X = X_1 \times X_2$. Zeigen Sie, dass dann

$$\begin{array}{rccl} d\colon & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto & \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\} \end{array}$$

wohldefiniert (d.h. stets endlich) und eine Metrik auf X ist.

c) Begründen Sie, warum in b) keine Metrik entseht, wenn man das Maximum durch ein Minimum ersetzt.

Aufgabe 3 (4+1+5 Punkte) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V.

a) Sei die Norm durch ein Skalarprodukt gegeben, d.h. sei $\langle ,\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V und $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Ziegen Sie: Dann gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x,y \in V.$$

b) Skizzieren Sie die geometrische Bedeutung der Parallelogrammgleichung für $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

c) Erfülle die Norm $\|\cdot\|$ die Parallelogrammgleichung. Zeigen Sie: Dann wird durch

$$\langle x,y\rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

ein Skalarprodukt auf V definiert und es gilt $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.
Hinweis: (1) Sie brauchen die Homogenität $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$ nur für $\lambda \in \mathbb{Q}$ beweisen. Wenn Sie es schaffen, zeigen Sie die *Stetigkeit der Norm*: Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ und überlegen sich, wie damit aus der Homogenität für $\lambda \in \mathbb{Q}$ die Homogenität für $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt. Dafür gibt es keine Punkte, aber Sie lernen etwas...
(2) Für den Nachweis der Additivität $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$ müssen Sie beide Seiten mithilfe der Normendefiniton ausdrücken und dann die Parallelogrammgleichung auf mehrere Weisen anwenden. Sorgfältige Inspektion der Ergebnisse (sauber auf eine Seite schreiben und vergleichen!) führt dann zum Ziel.)

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 19.-21.4. besprochen werden:

Aufgabe Ü1

Sei $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ lässt sich eindeutig als $z = e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi)$ darstellen. Zeigen Sie, dass dann $d \colon S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$ mit $d(e^{it}, e^{is}) = |s - t|$ eine Metrik auf S^1 ist.

Aufgabe Ü2

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass dann auch $\tilde{d} \colon X \times X \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{d}(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine Metrik auf X ist. Beschreiben Sie die ε-Kugeln von $\tilde{d}$ durch die von d.

Aufgabe Ü3 (Raum der stetigen Funktionen)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall und $C^0(I)$ der Raum der stetigen Funktionen von I nach $\mathbb{R}$. Wir beterachten die Abbildung $\| \cdot \|_I \colon C^0(I) \times C^0(I) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$d_I(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| \colon x \in I\}.$$

Begründen Sie, warum d_I wohldefiniert ist und zeigen Sie, dass d_I eine Metrik auf C^0 ist.

Aufgabe Ü4

Wir betrachten den Raum

$$X = \{ \mathbb{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \ x_n \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} : x_n = 0 \forall n \geq N\}$$

und die Abbildung

$$d \colon X \times X \to \mathbb{R}, \quad d(\mathbb{x}, \mathbb{y}) = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} \mid \ x_n - y_n \neq 0\} & \text{falls } \mathbb{x} \neq \mathbb{y} \\ 0 & \text{falls } \mathbb{x} = \mathbb{y} \end{cases}$$

a) Begründen Sie, warum d wohldefiniert (d.h. immer endlich) ist.

b) Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

c) Beschreiben Sie die ε-Kugeln dieses Raumes.

Aufgabe Ü5 (Metrik der französischen Eisenbahn)

Wir betrachten auf die folgende Abbildung $d_{SNCF} \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$d_{SNCF}(x, y) = \begin{cases} \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass d_{SNCF} eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist und beschrieben Sie die ε-Kugeln dieser Metrik.