Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 12

Analysis II* SS 2016

(Abgabe: 12.07.2016)

Aufgabe 1 (7+3 Punkte)
(i) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Laplace-Operator $\Delta : C^2(U,\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(U,\mathbb{R})$ sei definiert durch

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und $P : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinatenabbildung $P(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Zeigen Sie, dass mit $F = f \circ P$ gilt:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)(r,\varphi) = (\Delta f)(P(r,\varphi)).$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

die Gleichung $\Delta f = 0$ erfüllt.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)
(i) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist und dass

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

gilt und schlussfolgern Sie daraus, dass f nicht zwei Mal stetig differenzierbar sein kann.
(ii) Bestimmen Sie für die Funktion $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^y$ die Taylorentwicklung in $p_0 = (1,1)$ bis zur zweiten Ordnung und berechnen Sie damit näherungsweise $\sqrt[10]{(1,05)^9}$.

Aufgabe 3 (4+6 Punkte)
(i) Sei $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi - x\}$ und

$$f(x,y) := \sin x + \sin y - \sin(x+y).$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f. Was sind die globalen Extrema?
(ii) Wie groß müssen die drei Seitenlängen eines Quaders mit vorgegebener Oberfläche O sein, damit sein Volumen maximal wird?

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 05.07.-07.07. besprochen werden:

Aufgabe Ü0 Was ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform? Was ist die Gramsche Matrix einer symmetrischen Bilinearform? Was wissen Sie über die Diagonalisierbarkeit symmetrischer Bilinearformen bzw. symmetrischer Matrizen über $\mathbb{R}$? Wofür benutzt man das Hurwitzsche Kriterium symmetrischer Bilinearformen und wie wendet man es an?

Aufgabe Ü1 Bestimmen Sie alle partiellen Ableitung bis zur 2. Ordnung von den Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \sin^2(xy), \quad g(x,y) = e^{\cos x + y^3}.$$

Aufgabe Ü2 (i) Bestimmen Sie für die Funktion $f : \{(x,y)|x,y > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

die Taylorentwicklung in $p_0 = (1,1)$ bis zur dritten Ordnung.

(ii) Bestimmen Sie für die Funktion $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = y \log x + x e^{y+2}$$

die Taylorentwicklung in $p_0 = (\frac{1}{e}, -1)$ bis zur zweiten Ordnung.

Aufgabe Ü3 Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = (y^2 - x^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

und bestimmen Sie, ob es sich um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte handelt.

Aufgabe Ü4 Sei A eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix und $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \frac{\langle Ax, x \rangle}{||x||^2}.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und lokalen Extrema von F. Was hat das mit Eigenwerten und Eigenvektoren zu tun?