Übungsblatt 13

Analysis II* SS 2016

(Abgabe: 21.07.2016)

Aufgabe 1 (5+3+2 Punkte)
Wir betrachten die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\phi(x, y) = (2e^x - x^2, x + y).$$

(i) Zeigen Sie, dass ϕ bijektiv ist.

(ii) Zeigen Sie, dass ϕ ein Diffeomorphismus ist.

(iii) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Umkehrfunktion ϕ^{-1} im Punkt $(2, 0)$.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)
Wir betrachten die Gleichung

$$f(x, y, z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0.$$

(i) Prüfen Sie, ob $(x_0, y_0, z_0) = (1, \sqrt{5}, 0)$ und $(x_1, y_1, z_1) = (0, e, 2)$ die Gleichung erfüllen und die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen gelten.

(ii) Berechnen Sie die partielle Ableitungen der jeweiligen Auflösung $z_i = z_i(x, y)$ nach x und y im jeweiligen Punkt (x_i, y_i), für $i = 0, 1$, falls die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind.

Aufgabe 3 (2+4+4 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (\cosh(x)\cos(y), \sinh(x)\sin(y))$$

und $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$, $U_1 = \{(x, y) \in U | 0 < y < 2\pi\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $f|_U : U \to f(U)$ kein Diffeomorphismus ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $f|_U : U \to \mathbb{R}^2$ um jeden Punkt von U ein beliebig oft stetig differenzierbarer lokaler Diffeomorphismus ist.

(iii) Zeigen Sie, dass $f|_{U_1} : U_1 \to f(U_1)$ ein beliebig oft stetig differenzierbarer Diffeomorphismus ist.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 12.07.-14.07. besprochen werden:

Aufgabe Ü1
Wiederholen Sie, wie man das Differential einer Funktion nach mehreren Variablen nicht nur findet, sondern auch beweist.

Aufgabe Ü2
Wir betrachten die Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $f(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ bzw. $g(r,\varphi,\psi) = (r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\psi)$.
(i) Bestimmen Sie (r,φ,z) und $(r\varphi,\psi)$ so, dass f bzw. g um diesen Punkt lokal umkehrbar sind (im Sinne des Satzes über den lokalen Diffeomorphismus. Bestimmmen Sie für ein solches Tripel eine größtmögliche Umgebungen U und V, so dass $f|_U : U \to f(U)$ bzw. $g|_V : V \to g(V)$ Diffeomorphismen sind.
(ii) Bestimmen Sie die Inversen von $d_{(r,\frac{\pi}{2},z)}f$ bzw. $d_{(r,\varphi,\psi)}g$ wo letztere existieren.
(iii) Beschreiben Sie f und g geometrisch.

Aufgabe Ü3*
Wir definieren induktiv folgende Abbildungen $P_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} P_2(r,\varphi_1) &= (r\cos(\varphi_1), r\sin(\varphi_1)) \\ P_{n+1}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_n) &= (P_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\cos(\varphi_n), r\sin(\varphi_n)). \end{aligned}$$

(i) Ist P_n ein Diffeomorphismus?

(ii) Um welche Punkte des $\mathbb{R}^n$ ist P_n ein lokaler C^k-Diffeomorphismus und wie groß kann man k wählen?

Aufgabe Ü4
Zeigen Sie, dass man die Lösungsmenge der Gleichung

$$f(x,y) = ye^{xy} - 1 = 0$$

in der Umgebung des Punktes $p = (0,1)$ als Graph einer Funktion $y = \varphi(x)$ mit $x \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ beschreiben kann. Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom von φ im Punkt $x = 0$, d.h.

$$T_2(\varphi,0)(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \varphi''(0)\frac{x^2}{2}.$$