Übungsblatt 2

Analysis II* SoSe 2016

Abgabe: 3.5.2016

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

(a) Seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ zwei metrische Räume. Wir betrachten das Produkt $X := X_1 \times X_2$ mit der Produktmetrik $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))\}$ (siehe Aufgabe 2 (b) Übungsblatt 1). Zeigen Sie folgende Behauptungen:
(i) Sind $U_1 \subset X_1$ und $U_2 \subset X_2$ offene Mengen, so ist $U_1 \times U_2$ ebenfalls offen.
(ii) Sind $A_1 \subset X_1$ und $A_2 \subset X_2$ abgeschlossen, so ist auch $A_1 \times A_2$ abgeschlossen.
Hinweis: (ii) ist etwas schwerer als (i).
(b) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik der Abschluss der (offenen) Kugel die abeschlossene Kugel ist: $\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)$. Zeigen Sie, dass für allgemeine metrische Räume $\overline{B(x,r)} \subset \overline{B}(x,r)$ gilt und geben Sie einen metrischen Raum und eine Kugel darin an, für die nicht die Gleichheit gilt.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

(a) Auf der Menge der Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d) führen wir folgende Operationen ein: $M \subset X$,

$$I(M) := \overline{\mathring{M}}, \qquad J(M) = \mathring{\overline{M}}.$$

Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen M: $I(I(M)) = I(M)$ und $J(J(M)) = J(M)$ gilt.
(b) Zeigen Sie, dass aus einer gegebenen Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) durch mehrfache Ausführung vom Abschluss oder vom Inneren höchstens sieben verschiedene Mengen entstehen können (inklusive der Teilmenge M selbst). Z.B. enstehen aus dem halboffenen Intervall $[a, b)$ $[a, b]$ und (a, b), also drei Mengen durch das Innere und den Abschluss. Das Innere von $[a, b]$ ist einfach wieder (a, b), also keine neue Menge. Geben Sie eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ an, bei der genau sieben verschieden Mengen entstehen.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie Satz 127 der Vorlesung: Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) ist abgeschlossen genau dann, wenn sie Folgen–abgeschlossen ist.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 26..-28.4. besprochen werden:

Aufgabe Ü1

(i) Zeigen Sie Behauptung (b) aus dem Satz 124 der Vorlesung: $\overline{M} = X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} M)$
(ii) Zeigen Sie Behauptung (c) aus Satz 124 der Vorlesung: ∂M ist abgeschlossen und

$$\partial M = \{x \in X \mid \forall r > 0 : B(x,r) \cap M \neq \emptyset \text{ und } B(x,r) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset\}.$$

Aufgabe Ü2

(a) Zeigen Sie, dass das Innere vom Inneren einer Menge gleich dem Inneren ist: $\mathring{\mathring{M}} = \mathring{M}$ und $\mathring{M} = M$ genau dann, wenn M offen ist.
(b) Zeigen Sie, dass der Abschluss vom Abschluss einer Menge wieder der Abschluss ist: $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ und M ist abgeschlossen, genau dann, wenn $\overline{M} = M$.

Aufgabe Ü3

Zeigen Sie, dass der Rand vom Rand vom Rand einer Menge gleich dem Rand vom Rand derselben Menge ist: $\partial(\partial(\partial M)) = \partial(\partial M)$. Geben Sie ein Beispiel einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ an, für die $\partial(\partial M) \neq \partial M$.

Aufgabe Ü4

(Folgen–Stetigkeit der Metrik). Seien $(x_k)_{k\in N}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in einem metrischen Raum (X, d), die gegen $x \in X$ bzw. $y \in X$ konvergieren. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$$

gilt (siehe auch Übungsblatt 1, Hinweis (1) zur Aufgabe 3).