Übungsblatt 6

Analysis II* SoSe 2016

Abgabe: 31.5.2016

Aufgabe 1 (4+2+4 Punkte)

Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g\colon W \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

a) Zeigen Sie: Dann ist auch $\lambda f + \mu g\colon W \to \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt

$$\int_W (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_W f(x)dx + \mu \int_W g(x)dx.$$

b) Zeigen Sie: Ist $f \leq g$, so gilt

$$\int_W f(x)dx \leq \int_W g(x)dx$$

c) Zeigen Sie: Ist $W_1 \subset W$ ein weiterer Quader, so ist $f|_{W_1}\colon W_1 \to \mathbb{R}$ ebenfalls integrierbar. Entscheiden sie, ob stets gilt, dass

$$\int_{W_1} f(x)dx \leq \int_W f(x)dx.$$

Aufgabe 2 (4+4+2 Punkte)

a) Sei $A = B \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, wobei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine beliebige Menge ist. Zeigen Sie, dass dann A eine Lebesgue-Nullmenge ist.

b) Entscheiden Sie, ob die Menge $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

c) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und eine Lebesgue-Nullmenge. Zeigen Sie, dass dann A eine Jordan-Nullmenge ist.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Bemerkung: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (falls schon bekannt) darf nicht verwendet werden.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ irrational} \\ 1 - \frac{1}{q} & 0 \neq x = \frac{p}{q} \text{ rational}, \quad p,q \quad \text{teilerfremd} \\ \sqrt{\pi} & x = 0 \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist und bestimmen Sie das Riemann-Integral.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 24.-26.5. besprochen werden:

Aufgabe Ü1

Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und sei $f\colon W \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie: Dann ist auch $|f|$ Riemann-integrierbar und es gilt: $\left|\int\limits_W f(x)dx\right| \leq \int\limits_W |f(x)|dx$.

Aufgabe Ü2

a) Zeigen Sie: Sind $A_1, A_2, \dots \subset \mathbb{R}^N$ Lebesgue-Nullmengen, so ist auch $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ eine Lebesgue-Nullmenge.

b) Zeigen Sie: Ist $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig, so ist der Graph von f

$$\operatorname{graph}(f) = \{\,(x, f(x)) \mid x \in K\}$$

eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Mit Aufgabe 2b) der Vorderseite, folgt dann, dass graph (f) eine Jordan-Nullmenge ist. (Warum?)

Aufgabe Ü3

Sei $a > 1$. Zeigen Sie, dass $f\colon [1, a] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$, Riemann-integrierbar ist und zeigen Sie

$$\int\limits_1^a \frac{1}{x} dx = \log a.$$