Übungsblatt 10

Analysis III WS 2016/17

Musterlösung

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)
(1) Nach Wahl einer Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von V lässt sich jede $k-$Form α eindeutig darstellen als $\alpha = \sum_{|I|=k} a_I e_I^*$, wobei die Summe über alle geordneten k-Tupel $I = (i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ mit $i_j \in \{1, \dots, n\}$ ist, $a_I \in \mathbb{R}$ und $e^I = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge ei_k$ für jedes Tupel I ist. Wegen der Linearität des Wedge-Produktes genügt es also, die Aussage für den Spezialfall $\alpha = e^I$, $|I| = k$ und $\beta = e^J$, $|J| = l$ zu zeigen.

Nach Definition ist das Wedge-Produkt assoziativ und erfüllt $e^i \wedge e^j = -e^j \wedge e^i$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Induktiv folgt: $e^I \wedge e^j = (-1)^k e^j \wedge e^I$ und daraus wieder induktiv

$$e^I \wedge e^J = (-1)^{km} e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_m} \wedge e^I \wedge e^{j_{m+1}} \wedge \cdots \wedge e^{j_l}$$

für $1 \leq m \leq l$. Insbesondere erhalten wir für $m = l$: $e^I \wedge e^J = (-1)^{kl} e^J \wedge e^I$, was zu beweisen war.

(2) Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\alpha = g$ eine Nullform, d. h. eine Funktion auf U ist. Dann ist nach Definition für jedes Vektorfeld X auf V

$$(f^*(d\alpha))(X) = d\alpha(df(X)) = dg(df(X)) = d(f \circ g)(X) = d(f^*\alpha)(X).$$

Da X beliebig war, folgt $f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$.

Wir betrachten jetzt den Fall einer k-Form α auf U, wo $k > 0$. Wegen der Linearität des Pullbacks und des äußeren Differentials können wir o. B. d. A. $\alpha = g dy_I$ annehmen, wo $I = (i_1 < \cdots < i_k)$, $i_j \in \{1, \dots, m\}$ und $g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Dann ist $d\alpha = dg \wedge dy_I$ und wegen der Kompatibilität des Pullbacks mit dem Wedge-Produkt ist

$$f^*(d\alpha) = f^*(dg) \wedge f^*(dy_I) = d(g \circ f) \wedge f^* dy_I.$$

Andererseits ist

$$d(f^*\alpha) = d((g \circ f) f^* dy_I) = d(g \circ f) \wedge f^*(dy_I) + (g \circ f) d(f^*(dy_I)).$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $d(f^* dy_I) = 0$ ist für jede Indexmenge I. Wegen der Kompatibilität des Pullbacks mit dem Wedge-Produkt und der Leibniz-Regel genügt es, den Fall wenn $I = \{i\}$ einelementig ist zu betrachten. Indem wir die Defnition des Pullbacks benutzen und $f^* dy_i$ auf den Basisvektorfeldern $\partial/\partial x_j$ auf $V \subset \mathbb{R}^n$ auswerten, gilt $f^* dy_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$. Wir erhalten

$$d(f^* dy_i) = \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j = \sum_{k<j} (\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}) dx_k \wedge dx_j = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt das Schwarz-Lemma benutzt haben.

Aufgabe 2 (2+4+1+3 Punkte)
(i) Wir berechnen

$$d(i_X(e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)) = d(\sum_{j=1}^{n}(-1)^j X_j e^1 \wedge \cdots \wedge e^{j-1} \wedge e^{j+1} \wedge \cdots \wedge e^n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^j \frac{\partial X_j}{\partial x_i} e^i \wedge e^1 \wedge \cdots \wedge e^{j-1} \wedge e^{j+1} \wedge \cdots \wedge e^n.$$

Da der Ausdruck $e^i \wedge e^1 \wedge \cdots \wedge e^{j-1} \wedge e^{j+1} \wedge \cdots \wedge e^n$ wegen der Antisymmetrie genau für $i = j$ ungleich null ist, erhalten wir

$$d(i_X(e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j \frac{\partial X_j}{\partial x_j} e^j \wedge e^1 \wedge \cdots \wedge e^{j-1} \wedge e^{j+1} \wedge \cdots \wedge e^n$$

$$= (\sum \sum_{j=1}^{n}(-1)^{2j} \frac{\partial X_j}{\partial x_j}) e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = \operatorname{div}(X)(e^1 \wedge \cdots \wedge e^n).$$

(2) Nach Definition ist die Volumenform μ in den durch φ definierten Koordinaten gegeben durch $\sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 \wedge \ldots dx_n$. Indem wir in den Koordinaten φ arbeiten, erhalten wir aus $d(i_X\mu) = \operatorname{div}(X)\mu$:

$$d(i_X\mu) = d(i_X(\sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 \wedge \ldots dx_n))$$

$$= d(\sqrt{\det(g_{ij})} \sum_{k=1}^{n}(-1)^k X_k e^1 \wedge \cdots \wedge e^{k-1} \wedge e^{k+1} \wedge \cdots \wedge e^n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^j \frac{\partial(\sqrt{\det(g_{ij})}X_k)}{\partial x_k} e^k \wedge e^1 \wedge \cdots \wedge e^{k-1} \wedge e^{k+1} \wedge \cdots \wedge e^n$$

$$= (\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\sqrt{\det(g_{ij})}X_k)}{\partial x_k}) dx_1 \wedge \ldots dx_n = \operatorname{div}_M(X)\sqrt{\det(g_{ij})}dx_1 \wedge \ldots dx_n,$$

also

$$\operatorname{div}_M(X) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\sqrt{\det(g_{ij})}X_k)}{\partial x_k}.$$

(3) Wegen $(\nabla f)_k = \langle \nabla f, e_k \rangle = df(e_k) = \frac{\partial f}{\partial k}$ ist

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(\nabla f)_k}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}.$$

(4) Aus der Definition der ersten Fundamentalform folgt für alle Vektorfelder V, W auf U die Formel $\langle d\varphi(V), d\varphi(W) \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} V_i W_j$. Durch Vergleich mit (3) erhalten wir für den Gradienten einer Funktion f in den durch φ gegebenen Koordinaten die Darstellung

$$(\nabla f)_i = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Durch Anwendung des Ergebnisses von (3) folgt

$$\operatorname{div}_M(\nabla f) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(\sqrt{\det(g_{ij})} g_{kj} \frac{\partial f}{\partial x_j}).$$

Aufgabe 3 (3+3+4 Punkte)
(1) (a) $d\omega = -e^x \sin y dy \wedge dx - e^x \sin y dx \wedge dy = e^x \sin y dx \wedge dy - e^x \sin y dx \wedge dy = 0$.
(b) $d\eta = 0 + 2dx \wedge dy \wedge dz + 2dy \wedge dx \wedge dz = 2dx \wedge dy \wedge dz - 2dx \wedge dy \wedge dz = 0$.
(c) $d\sigma = 0$, da wegen Antisymmetrie $dx \wedge \mu = dy \wedge \mu = dz \wedge \mu = 0$ für $\mu = dx \wedge dy \wedge dz$.

(2) Es gilt $d(xy^3 dx + \frac{3}{2}x^2y^2 dy) = 3xy^2 dy \wedge dx + 3xy^2 dx \wedge dy = 0$. Nach Ü3 auf der Rückseite existiert eine Form vom Rang null, d. h. eine Funktion Φ auf $\mathbb{R}^2$, mit $d\Phi = xy^3 dx + \frac{3}{2}x^2y^2 dy$. Es muss gelten $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = xy^3$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{3}{2}x^2y^2$. Indem wir für Φ den Ansatz $\Phi = ax^ny^m$, $a, n, m \in \mathbb{R}$ machen, finden wir die Lösung $\Phi_0(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^3$. Weiterhin ist jede Funktion der Form $\Phi = \Phi_0 + C$, $C \in \mathbb{R}$ offenbar eine Lösung. Da andererseits für je zwei Lösungen Φ_1, Φ_2

$$d(\Phi_1 - \Phi_2) = d\Phi_1 - d\Phi_2 = 0$$

und damit $\Phi_1 - \Phi_2$ konstant ist folgt, dass die Lösungsmenge durch

$$\{\Phi : \Phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^3 + C, C \in \mathbb{R}\}$$

gegeben ist.

(3) Da $d(ydx \wedge dy) = 0$, existiert nach Ü3 eine Lösung. Mit dem Ansatz $\eta = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ lautet die Gleichung $(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dx \wedge dy = ydx \wedge dy$, also $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = y$. Eine Lösung ist offenbar $f = y$, $g = xy$, also $\eta_0 = xydy$. Ist Φ eine beliebige glatte Funktion auf $\mathbb{R}^2$, dann ist wegen $d^2 = 0$ die Form $\eta = \eta_0 + d\Phi$ ebenfalls eine Lösung. Umgekehrt folgt aus Ü3, dass für jede Lösung η die Differenz $\eta - \eta_0$ die Form $d\Phi$ hat für ein Φ. Damit ist die Lösungsmenge

$$\{\eta : \eta = xydy + d\Phi, \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)\}.$$