Übungsblatt 6

Analysis III WS 2016/17

Musterlösung

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)
Wir definieren für $A, B \subset \mathbb{R}^m$:

$$d(A,B) := \inf_{x \in A, y \in B} ||x-y||.$$

a) Zeigen Sie:
i) Ist $M \subset \mathbb{R}^m$ eine Untermannigfaltigkeit und gilt für $y \in \mathbb{R}^m \setminus M$ und $x \in M$ die Gleichheit $||x-y|| = d(M, \{y\})$, dann ist die Gerade $L(x,y)$ durch x und y orthogonal zum Tangentialraum $T_x M$.
ii) Sind $M, N \subset \mathbb{R}^m$ zwei disjunkte Untermannigfaltigkeiten und gilt $||x-y|| = d(M,N)$ für zwei Punkte $x \in M$ und $y \in N$, dann ist die Gerade $L(x,y)$ durch x und y orthogonal zu sowohl $T_x M$, als auch $T_y N$.
b) Wir betrachten die Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, \quad B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Skizzieren Sie A und B und berechnen Sie $d(A,B)$.

Lösung

a) i) Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = ||x-y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$. Aus der Übung ist bekannt, dass $f|_M$ in einem Punkt $x \in M$ ein Minimum annimmt, wenn $\nabla f(x) \perp T_x M$ gilt, also ist

$$\langle \nabla f(x), v \rangle = 0 \quad \forall v \in T_x M.$$

Andererseits können wir den Gradienten von f berechnen:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{||x-y||} (2(x_1 - y_1), ..., 2(x_m - y_m)) = \frac{x-y}{||x-y||}.$$

Also gilt für alle $v \in T_x M$: $\langle x-y, v \rangle = 0$, womit die Behauptung wegen $L(x,y) = span(x-y)$ bewiesen ist.
ii) Für den Punkt $y \in N$ ist $d(M,N) = d(M, \{y\})$ und nach Aufgabenteil i) folgt dann, dass $L(x,y) \perp T_x M$ gilt. Vollkommen analog folgt, dass $L(x,y) \perp T_y N$ gelten muss.

b) Nun ist der Abstand von A und B gesucht. Wir stellen zunächst fest, dass der Abstand am kleinsten für Randpunkte wird, d.h. er genügt, den Abstand der Mengen

$$\partial A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \quad \partial B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 1\}$$

zu betrachten. Beides sind 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$, die Tangentialräume haben also ebenfalls die Dimension 2. Nach a),ii) müssen die Tangentialräume an den Punkten mit dem niedrigsten Abstand also parallel sein. Betrachtet man die Beschreibungen von ∂A und ∂B durch:

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 4x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{array}, \quad G: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 4(x-2)^2 + (y-2)^2 - 1 \end{array}$$

mit $\partial A = F^{-1}(0)$ und $\partial B = G^{-1}(0)$, so stellen wir fest, dass $T_b \partial B$ für jedes B die z-Achse enthält, $T_a \partial A$ aber nur, falls $z = 0$. Also kann das Minimum nur in der Ebene $z = 0$ angenommen werden und die Punkte mit dem kleinsten Abstand kommen aus den Mengen

$$A' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 1\}, \quad B' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1\}.$$

Es genügt nun, die Teilmengen von A' und B' zu betrachten, in denen $x \in (0, \frac{1}{2})$ und $y \in (0,1)$, bzw. $x \in (\frac{3}{2}, 2)$ und $y \in (1,2)$. Auf diesen Teilmengen, lassen sich A' und B' als Graphen von Funktionen darstellen:

$$A' = \{(a, f(a)) \mid f(a) = \sqrt{1-4a^2}\}, \quad B' = \{(b, g(b)) \mid g(b) = 2 - \sqrt{1-4(b-2)^2}\}.$$

Wieder nach a),ii) muss in den Punkten mit dem niedrigsten Abstand $f'(a) = g'(b)$ gelten, d.h.

$$-\frac{4a}{\sqrt{1-4a^2}} = \frac{4(b-2)}{\sqrt{1-4(b-2)^2}}.$$

Das ist offensichtlich erfüllt für $b = 2 - a$. Der Abstand von A und B ist nun das Minimum der Abstandsfunktion aller dieser Punkte. Also betrachten wir die Fuktion

$$\begin{array}{rccc} d: & \left(0, \frac{1}{2}\right) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (x-(2-x))^2 + (f(x) - g(2-x))^2. \end{array}$$

Nach Umformungen ist

$$d(x) = 4((x-1)^2 + (\sqrt{1-4x^2} - 1)^2) \quad \Longrightarrow \quad d'(x) = 8\left(\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} - 3x - 1\right),$$

also ist $d'(x) = 0$, wenn x die Gleichung

$$\frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} = 3x + 1$$

erfüllt. Diese Gleichung kann man nicht per Hand lösen, die einzige Lösung ist $x = \frac{\sqrt{13}}{10}$. Damit ergibt sich für den Abstand:

$$d(A, B) = d\left(\frac{\sqrt{13}}{10}\right) \approx 2,01.$$