Übungsblatt 5

Analysis III WS 2016/17

Musterlösung

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)
Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ sind und berechnen Sie die Tangentialebenen in einem beliebigen Punkt.

a) $M_1 = \{(\cosh z \cdot \cos u, \cosh z \cdot \sin u, z) \in \mathbb{R}^3 | (u, z) \in \mathbb{R}^2\}$

b) $M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$

Lösung:

a) Für fixiertes z parametrisiert u einen Kreis des Radius $\cosh z$ in der x-y-Ebene. Also ist M_1 die Nullstellenmenge der Funktion

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad F(x, y, z) = x^2 + y^2 - \cosh^2 z$$

M_1 ist eine Untermannigfaltigkeit, falls $0 \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von F ist, d.h. $d_pF \neq 0$ für alle $p \in F^{-1}(0) = M_1$. Das Differential von F im Punkt $p = (x, y, z)$ ist

$$d_pF = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2\cosh z \sinh z \end{pmatrix}.$$

Also folgt aus $d_pF = 0$, das $x = y = 0$. Aber es ist $F(0, 0, z) = -\cosh^2 z \neq 0$, da $\cosh z$ nirgends verschwindet. D.h. 0 ist ein regulärer Wert und M_1 damit eine Mannigfaltigkeit. Die Tangentialebene im Punkt $p \in M_1$ ist dann

$$p + T_pM_1 = p + \ker d_pF = p + \{v \in \mathbb{R}^3 | 2xv_1 + 2yv_2 - 2\cosh z \sinh z v_3 = 0\}.$$

b) M_2 ist die Nullstellenmenge der Funktion $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$. Also genügt es zu zeigen, dass $0 \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von F ist. Das Differential von F im Punkt $p = (x, y, z)$ ist

$$d_pF = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \end{pmatrix}.$$

Also ist $d_pF = 0$ nur für $p = (0, 0, 0)$, aber $F(0, 0, 0) = -1 \neq 0$, d.h. 0 ist ein regulärer Wert von F. Die Tangentialebene in p ist dann

$$p + T_pM_2 = p + \ker d_pF = p + \{v \in \mathbb{R}^3 | 2xv_1 + 2yv_2 - 2zv_3 = 0\}.$$