Aufgabe 1 (5+5 Punkte)
Bestimmen Sie fr die folgenden Vektorfelder die kritischen Punkte und entscheiden Sie, ob diese stabil oder asymptotisch stabil sind in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$

a) $X(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ \alpha(1-x^2)y - x \end{pmatrix}$ mit $\alpha \leq 0$.

b) $X(x,y) = \begin{pmatrix} -y - \alpha x^3 \\ x - \alpha y^3 \end{pmatrix}$.

(c)* Skizzieren Sie das Phasenportrait.

Lösung
a) Es sei $X(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der einzige kritische Punkt. Es gilt:

$$DX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\alpha yx - 1 & \alpha(1-x^2) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad DX(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind damit $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}\right)$ und somit ist $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ für alle α mit $|\alpha| \geq 2$. Außerdem ist die Spur $\tau = \alpha$ und die Determinante $\Delta = 1$. Damit lässt sich der kritisch Punkt wie folgt charakterisieren:

- $\alpha = 0 \quad \Rightarrow$ keine Aussage möglich
- $0 < \alpha < 2 \quad \Rightarrow$ instabiler Fokus
- $\alpha = 2 \quad \Rightarrow$ keine Aussage möglich
- $2 < \alpha \quad \Rightarrow$ instabiler Knoten
- $-2 < \alpha < 0 \quad \Rightarrow$ stabiler Fokus
- $\alpha = -2 \quad \Rightarrow$ keine Aussage möglich
- $\alpha < -2 \quad \Rightarrow$ stabiler Knoten

Eine mögliche Lyapunov-Funktion fr dieses System ist $L(x,y) = x^2+y^2$. Eine Lyapunov-Kandidatenfunktion ist es offensichlich (striktes Minimum in $(0,0)$). Es gilt:

$$\nabla L \cdot X = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha(1-x^2)y - x \end{pmatrix} = \alpha(1-x^2)2y^2.$$

Also gilt nach Lyapunov-Kriterium:

- $\alpha < 0 \quad \Rightarrow$ asymptotisch stabil
- $\alpha = 0 \quad \Rightarrow$ stabil
- $\alpha > 0 \quad \Rightarrow$ instabil

b) Auch hier ist der einzige kritische Punkt $x^* = (0,0)$. Also gilt:

$$DX = \begin{pmatrix} -3\alpha x^2 & -1 \\ 1 & -3\alpha y^2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad DX(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

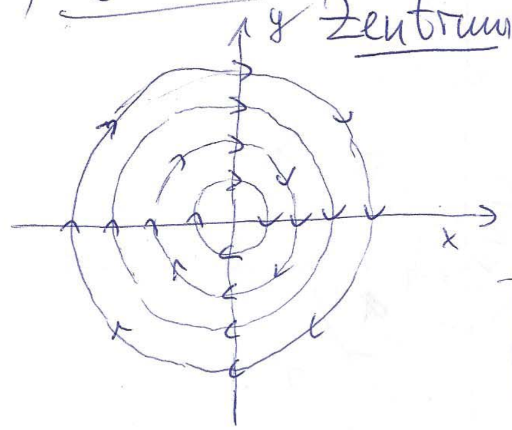
Damit sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm i$ und somit ist keine Aussage mglich. Auch hier ist $L(x,y) = x^2 + y^2$ eine mgliche Lyapunov-Kandidatenfunktion. Es gilt:

$$\nabla L \cdot X = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y - \alpha x^3 \\ x - \alpha y^3 \end{pmatrix} = -2\alpha(x^4 + y^4).$$

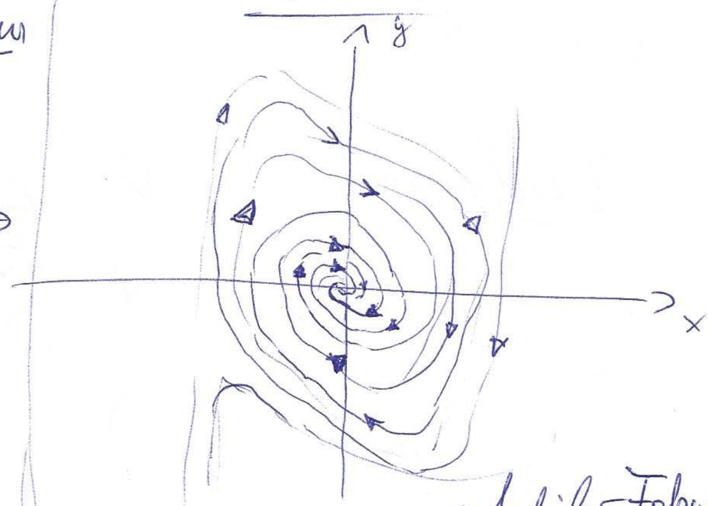
Und somit:

- $\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad$ asymptotisch stabil
- $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad$ stabil
- $\alpha < 0 \quad \Rightarrow \quad$ instabil

a) $\alpha = 0$: Zentrum

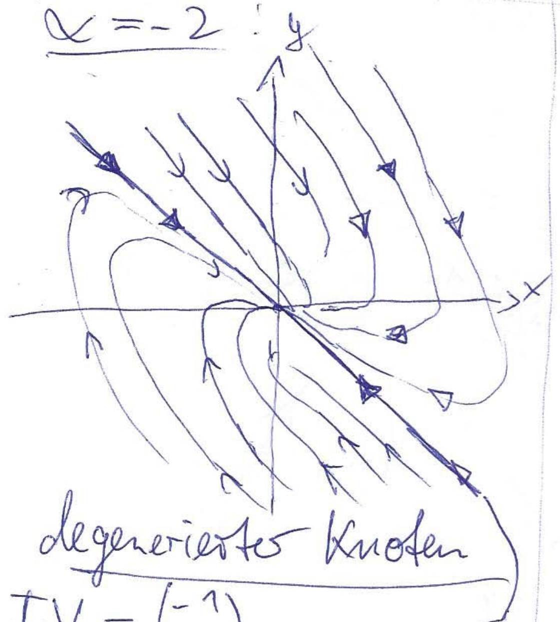


$\alpha = -1$:



stabiler Fokus

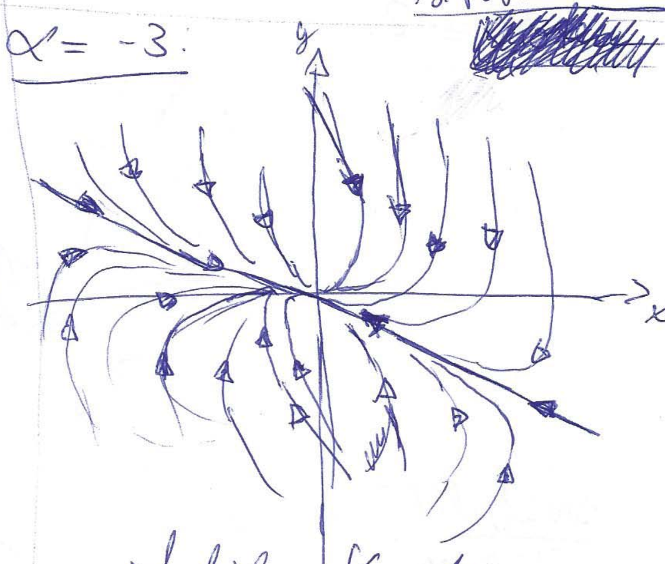
$\alpha = -2$:



degenerierter Knoten

$EV = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

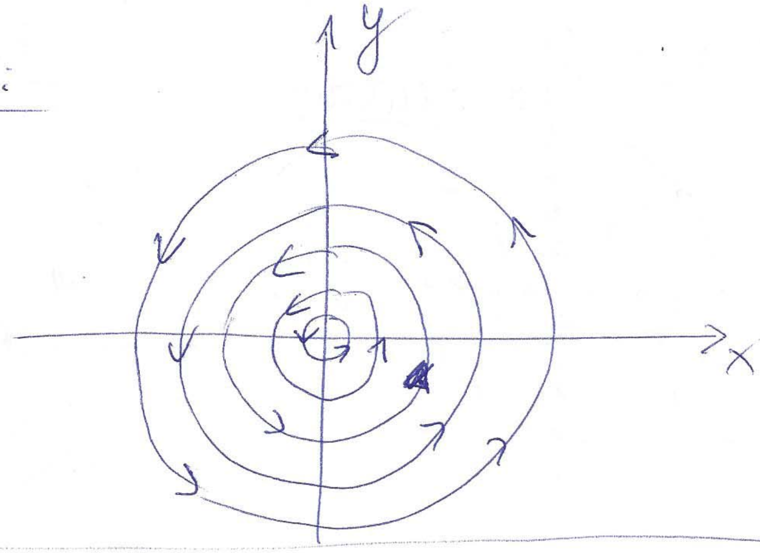
$\alpha = -3$:



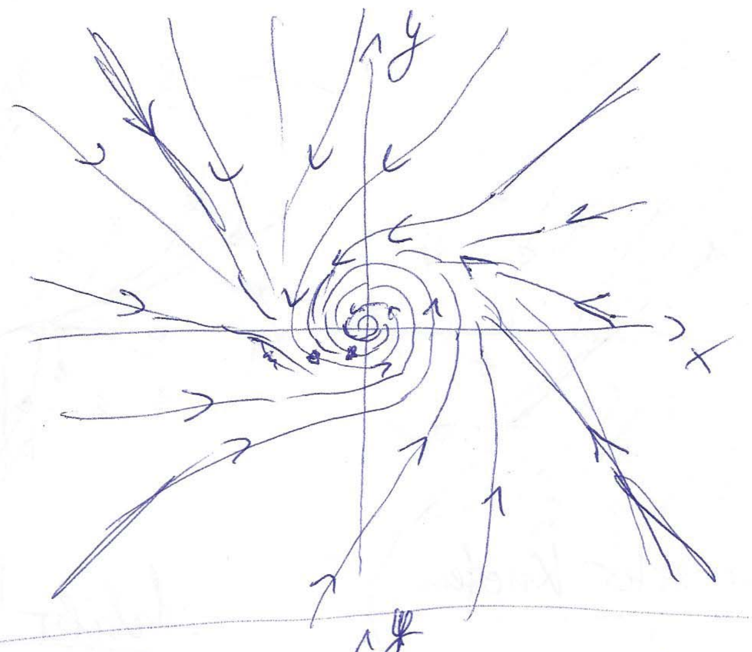
stabiler Knoten

b) $\alpha = 0$:

Zentrum

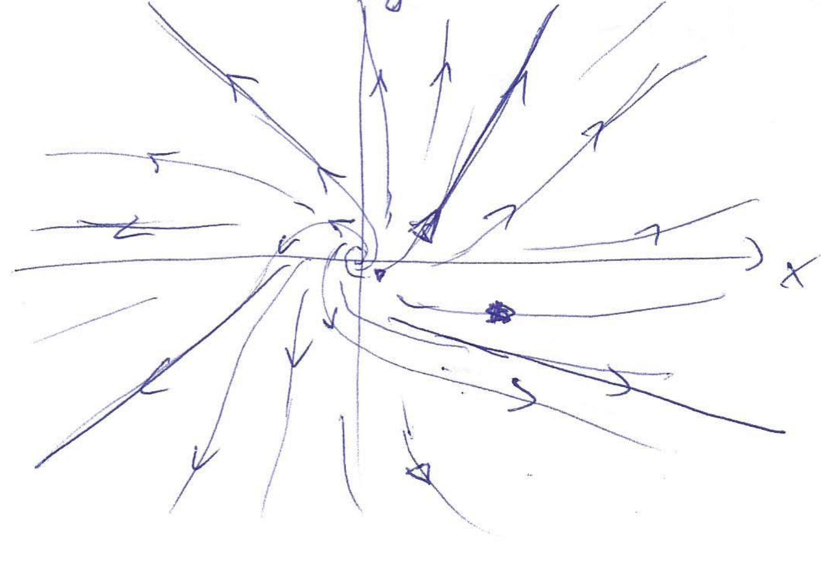


$\alpha = 2$:



stabiler Fokus

$\alpha = -2$:



instabiler Fokus