Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 1

Analysis III WS 2016/17

Musterlösung

Aufgabe 1 (6+4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Anfangwertporbleme mithilfe der in der Vorlesung besprochenen Lösungsverfahren. Geben Sie dabei dasgrößtmögliche Intervall an, auf dem die gesuchte Funktion definiert ist:
(a) $f'(t) = e^{-f(t)} \cos t, f(0) = 0$,
(b) $f'(t) = f(t) - f^3(t)$, $f(0) = 1$
(c) $tf'(t) = f(t) + t^2$, $f(1) = 1$ $(t > 0)$.

Lösung

(a) Für $f : I \to \mathbb{R}$, $0 \in I$ gilt

$$f'(t) = e^{-f(t)} \cos t \Leftrightarrow e^{f(t)} f'(t) = \cos t \Rightarrow \int_0^t e^{f(s)} f'(s) ds = \int_0^t \cos s ds$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{f(t)} e^y dy = \sin t \Leftrightarrow e^{f(t)} - e^{f(0)} = \sin t$$

und wegen $f(0) = 0$ folgt $e^{f(t)} = \sin t + 1$. Da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, folgt $I \subset (-\pi/2, 3\pi/2)$. Andererseits ist nach Umkehrung der letzten Gleichung

$$f(t) = \log(\sin t + 1)$$

eine Lösung auf $(-\pi/2, 3\pi/2)$. Das maximale Existenzintervall ist durch $(-\pi/2, 3\pi/2)$ gegeben.

(b) Falls $f(t) \neq 1$ ist, dann gilt die Äquivalenz

$$f'(t) = f(t) - f^3(t) \Leftrightarrow \frac{f'(t)}{f(t) - f^3(t)} = 1.$$

Es ist $f(0) = 1$ nach Voraussetzung und offenbar $f \equiv 1$ eine Lösung des Anfangswertproblems auf ganz $\mathbb{R}$. Wir überzeugen uns jetzt explizit davon, dass es keine weiteren Lösungen gibt. Angenommen, es wäre f eine Lösung des Afangwertproblems, so dass $f(t_1) \neq 1$ für ein $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_1 > 0$ (der Fall $t_1 < 0$ ist analog). Sei t_0 die maximale Zahl in $[0, t_1)$ mit $f(t_0) = 1$. Dann gilt für $t \in (t_0, t_1]$

$$\frac{f'(t)}{f(t) - f^3(t)} = 1 \Leftrightarrow \int_{f(t)}^{f(t_1)} \frac{dy}{y - y^3} = t_1 - t$$

und nach Integration mithilfe von Partialbruchzerlegung folgt

$$\log \frac{|f(t)|}{\sqrt{|1 - f^2(t)|}} = t - t_1 + \log \frac{|f(t_1)|}{\sqrt{|1 - f^2(t_1)|}}.$$

Da jedoch die rechte Seite der letzteren Gleichung für $t \in [t_0, t_1]$ beschränkt bleibt, ergibt sich ein Widerspruch zur Konvergenz $f(t) \to f(t_0) = 1$ für $t \to t_0$.

(c) Da die homogene lineare Differentialgleichung $tf'(t) = f(t)$ die Lösung $f(t) = Ct$, $C \in \mathbb{R}$ hat, ergibt der Ansatz $C = C(t)$ der Variation der Konstanten $t^2C'(t) + tC(t) = tC(t) + t^2$ und daraus $C'(t) = 1$, also $C = t + A$, $A \in \mathbb{R}$. Wegen $f(1) = 1 + A = 1$ folgt $A = 0$, also $f(t) = t^2$. Diese Lösung ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)
Wir betrachten für $a, b \in \mathbb{R}$, $b, c \neq 0$ die Differentialgleichung

$$y'(t) = cy(t) - by^2(t).$$

(i) Sei $a := c/b > 0$. Zeigen Sie: Ist $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differezierbare Funktion, welche die obige Gleichung löst, und gilt $y(t_0) < a$ (bzw. $y(t_0) > a$) für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, dann ist $y(t) < a$ (bzw. $y(t) > a$) für alle $t \geq t_0$.
(ii) Benutzen Sie den Ansatz $y(t) =: 1/z(t)$, um alle nicht-verschwindenden Lösungen der obigen Differentialgleichung zu finden. Zeigen Sie, dass $\lim_{t\to\infty} y(t) = a$ gilt für $c > 0$.

Lösung

(i) Wir haben mit $a = c/b$

$$y'(t) = cy(t) - by^2(t) \Leftrightarrow y'(t) = by(t)(a - y(t)).$$

Sei $y(t_0) < a$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$. Angenommen, es wäre $y(t_1) \geq a$, wo $t_1 > t_0$. Indem wir den Zwischenwertsatz anwenden, können wir o. B. d. A. $y(t_1) = a$ und $y(t) < a$ für $t \in [t_0, t_1)$ annemen. Aus der obigen Differentialgleichung folgt auf $[t_0, t_1)$ die Bedingung $|(\log(a - y(t)))'| = b|y(t)| < ab$ und hieraus $|\log(a - y(t))| < ab(t - t_0)$ bzw. $y(t) < a - c(t)$, $c(t) = e^{ab(t_0 - t)}$. Dies ist ein Widerpsruch zur Konvergenz $y(t) \to a$ für $t \to t_1$. Der Fall $y(t_0) > a$ folgt analog.

(ii) Nach $y(t) =: 1/z(t)$ geht die Differentialgleichung über in

$$-\frac{z'(t)}{z^2(t)} = \frac{c}{z(t)} - \frac{b}{z^2(t)} \leftrightarrow z'(t) = -cz(t) + b.$$

Letzteres ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung, deren zugehörige homogene Gleichung die Lösungen $z(t) = Ce^{-ct}$, $C \in \mathbb{R}$ besitzt. Der Ansatz $z(t) = C(t)e^{-ct}$ für die inhomogene Gleichung liefert $C'(t)e^{-ct} - cC(t)e^{-ct} = -cC(t)e^{-ct} + b$ und hieraus $C(t) = e^{ct}/a + K$, $K \in \mathbb{R}$. Wir folgern

$$z(t) = \frac{1}{a} + Ke^{-ct}$$

und daraus

$$y(t) = \frac{a}{1 + aKe^{-ct}}.$$

Für $c > 0$ ist $\lim_{t\to\infty} e^{-ct} = 0$ und daher $\lim_{t\to\infty} y(t) = a$.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)
(i) (Fallgeschwindigkeit in Atmosphäre) Lösen Sie das Anfangswertproblem $mv'(t) = -mg + a(v(t))^2$, $v(0) = 0$ $(m, g, a > 0)$. Bestimmen Sie das Verhalten von $v(t)$ für $t \to \infty$.

(ii) (Energieverlust durch Reibung) Es seien $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösungen des Systems

$$x'(t) = \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)),$$

$$y'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) - R(y(t)),$$

wo $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind. Zeigen Sie: (i) Falls $R \equiv 0$ ist, dann ist $H(x(t), y(t))$ konstant, (ii) Ist $H(x, y) = V(x) + E(y)$, wo $V, E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $E'(y)R(y) \geq 0$ für alle y, dann ist die Funktion $t \mapsto H(x(t), y(t))$ monoton fallend.

Lösung

(i) Wegen $v(0) = 0$ ist für jede Lösung des Anfangswertproblems $-mg + a(v(t))^2 \neq 0$ füt $|t|$ hinreichend klein und wir erhalten

$$mv'(t) = -mg + a(v(t))^2 \Leftrightarrow \frac{mv'(t)}{a(v(t))^2 - mg} = 1 \Rightarrow \int_0^t \frac{mv'(t)}{a(v(t))^2 - mg} = t \Leftrightarrow \int_{v(0)}^{v(t)} \frac{m}{av^2 - mg} dv = t$$

und nach Integration mithilfe von Partiabruchzerlegung

$$\log \left| \frac{v(t) - \sqrt{mg/a}}{v(t) - \sqrt{mg/a}} \right| - \log \left| \frac{v(0) - \sqrt{mg/a}}{v(0) - \sqrt{mg/a}} \right| = 2t\sqrt{ag/m}.$$

Wegen $v(0) = 0$ folgt hieraus

$$\log \left| \frac{v(t) - \sqrt{mg/a}}{v(t) - \sqrt{mg/a}} \right| = 2t\sqrt{ag/m}$$

und daraus nach einer kurzen Umrechnung

$$v(t) = -\sqrt{mg/a}\frac{\pm 1 - e^{-2t\sqrt{ag/m}}}{\pm 1 + e^{-2t\sqrt{ag/m}}}.$$

Indem wir nochmals die Anfangsbedingung $v(0) = 0$ benutzen, folgt

$$v(t) = -\sqrt{mg/a}\frac{1 - e^{-2t\sqrt{ag/m}}}{1 + e^{-2t\sqrt{ag/m}}}.$$

Insbesondere gilt für $t \to \infty$ die Konvergenz $v(t) \to -\sqrt{mg/a}$.

(ii) Falls $x(t)$ und $y(t)$ das angegebene System mit $R \equiv 0$ lösen, dann gilt

$$\frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

$$= \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) - \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) = 0$$

und daher ist $H(x(t), y(t))$ konstant.

Sei jetzt allgemeiner $H(x, y) = V(x) + E(y)$, $E'(y)R(y) \geq 0$. Wir berechnen

$$\frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) = \frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t))(-\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)) - R(y(t)))$$

$$= -\frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t))R(y(t)) = -E'(y(t))R(y(t)) \leq 0$$

und es folgt, dass $H(x(t), y(t))$ monoton fallend ist.