Übungsblatt 0

Analysis III WS 2016/17

(ohne Abgabe)

Aufgabe 1
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei der Gradient $\nabla f : U \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $(\nabla f)_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Erfülle eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0,T] \to U$ die Gleichung

$$\gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t))$$

für alle $t \in [0,T]$.
Zeigen Sie:
(i) Für alle $s,t \in [0,T]$ mit $s \leq t$ gilt $f(\gamma(s)) \leq f(\gamma(t))$.
(ii) Die Länge der Kurve γ ist gegeben durch

$$\ell(\gamma) = f(\gamma(T)) - f(\gamma(0)).$$

Aufgabe 2
(i) Wir definieren für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Begründen Sie, warum für jedes $v_0 \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $v(t) = e^{tA}v_0$ differenzierbar ist und die Gleichungen $v'(t) = Av(t)$, $v(0) = v_0$ erfüllt. (ii) Berechnen Sie e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$ und die folgenden Matrizen A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) Finden Sie mithilfe von (i) eine differenzierbare Funktion $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, so dass

$$v_1'(t) = v_1(t) - v_2(t)$$

$$v_2'(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

und $(v_1(0), v_2(0)) = (1,0)$ gilt. *Hinweis:* Betrachten Sie $w(t) := e^{-t}v(t)$.

Aufgabe 3
Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen.
(i) Seien $f : U \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{a} : U \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Definiere rot $\mathbf{a} : U \to \mathbb{R}^3$ durch $(\text{rot } \mathbf{a})_i := \frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k}$. wo (i, j, k) eine zyklische Permutation des Tripels $(1, 2, 3)$ ist und $\Delta f, \text{div } \mathbf{a} : U \to \mathbb{R}$ durch $\Delta f := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ sowie div $\mathbf{a} := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$. Beweisen Sie:
a) $\text{div } (\text{rot } \mathbf{a}) = 0$ und $\text{rot}(\nabla f) = 0$.
b) $(\text{rot } (\text{rot } \mathbf{a}))_i = (\nabla(\text{div } \mathbf{a}))_i - \Delta a_i$ und $\text{div } (\nabla f) = \Delta f$.
(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2, x_3) = 1/r$, wo $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = 0$$

erfüllt.
(iii) Sei $V \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\Phi : V \to U$ differenzierbar. Wir definieren für $\mathbf{a} : U \to \mathbb{R}^3$ die Abbildungen $\Phi_1^* \mathbf{a} : V \to \mathbb{R}^2$ und $\Phi_2^* \mathbf{a} : V \to \mathbb{R}$ via $\Phi_1^* \mathbf{a}_i := \langle \mathbf{a}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \rangle$ für $i = 1, 2$ und $\Phi_2^* \mathbf{a} := \langle \mathbf{a}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \rangle$.
Zeigen Sie:

$$\Phi_2^*(\text{rot } \mathbf{a}) = \text{rot } (\Phi_1^* \mathbf{a})$$

wobei rot $\mathbf{b} := \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial x_1}$ für eine differenzierbare Abbildung $\mathbf{b} : V \to \mathbb{R}^2$.