Übungsblatt 10

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 17.01.2017

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)
(1) Beweisen Sie für eine k-Form $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$ und eine ℓ-Form $\beta \in \Lambda^\ell(V^*)$ die Identität

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell}\beta \wedge \alpha.$$

(2) Beweisen Sie die folgende Aussage aus der Vorlesung: Ist α eine ℓ-mal stetig differenzierbare k–Form auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ und $f : V \to U$ eine $(\ell+1)$-mal stetig differenzierbare Abbildung zwischen den offenen Mengen $V \subset \mathbb{R}^n$ und U, so gilt für das äußere Differential und das pull-back unter f

$$d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha).$$

Hinweise: Dabei können Sie wie folgt vorgehen: Zeigen Sie die Aussage zunächst für 0-Formen, d.h. reellen Funktionen auf U. Benutzen Sie dann die allgemeine Form einer k-Form und die Leibniz-Regel.

Aufgabe 2 (2+4+1+3 Punkte)
(1) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie, dass für die Standardbasis $\{e_k\}_{k=1}^n$ und deren duale Basis $\{e^k\}_{k=1}^n \subset (\mathbb{R}^n)^*$

$$d(X \lrcorner (e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^n)) = \mathrm{div}(X)(e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^n),$$

wobei $\mathrm{div}(X)$ die Ihnen bereits bekannte Divergenz des Vektorfeldes ist.
(2) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine glatte n–dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit, $\mu \in \Omega^n(M)$ die zugehörige Volumenform und sei X ein differenzierbares Vektorfeld auf M. Dann definiert $\mathrm{div}_M(X)$ diejenige reelle Funktion auf M, die (eindeutig) durch

$$d(X \lrcorner \mu) = \mathrm{div}_M(X)\mu$$

bestimmt ist. Sei nun (U, φ) eine Karte von M, $\{\frac{\partial}{x_i}\}_{i=1}^n$ die Koordinatenvektorfelder, $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ sowie $g_{ij}(x) := \langle \frac{\partial}{x_i}(x), \frac{\partial}{x_j}(x)\rangle$ die Gramsche Matrix des durch $\mathbb{R}^N$ induzierten Skalarprodukts auf T_xM. Bestimmen Sie $\mathrm{div}_M(X)$ in Termen der Funktionen X_i und g_{ij}.
(3) Für eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ sei der Gradient, ∇f, das Vektorfeld, das definiert wird durch

$$\langle \nabla f(x), v\rangle = d_x f(v) \text{ für alle } v \in T_xM.$$

Berechnen Sie $\mathrm{div}(\nabla f)$ für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f zunächst für $M = U \subset \mathbb{R}^n$ offen.
(4) Berechnen Sie diesen Ausdruck nun für eine allgemeine differenzierbare Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ in einer Koordinate auf M in Termen von f und g_{ij}.

Bitte wenden...

Aufgabe 3 (3+3+4 Punkte)
(1) Berechnen Sie das (äußere) Differental folgender Differentialformen auf $\mathbb{R}^3$, die in den euklidischen Koordinaten (x, y, z) wie folgt aussehen:

(a) $\omega = e^x \cos(y) dx - e^x \sin(y) dy$,

(b) $\eta = xy dx \wedge dy + 2x dy \wedge dz + 2y dx \wedge dz$,

(c) $\sigma = f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$ wobei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(2) Bestimmen Sie alle Funktionen $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $d\Phi = xy^3 dx + \frac{3}{2} x^2 y^2 dy$.
(3) Bestimmen Sie alle glatten 1-Formen $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ mit $d\eta = y dx \wedge dy$.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Lösung und benutzen Sie dann Ü3 (d) um alle anderen zu ermitteln.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 10.01-12.01 besprochen werden:

Aufgabe Ü1
Beweisen Sie für eine k-Form $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$, eine ℓ-Form $\beta \in \Lambda^\ell(V^*)$ und einen Vektor $v \in V$ die Identität

$$v \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = (v \lrcorner \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (v \lrcorner \beta).$$

Aufgabe Ü2
(1) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $X : U \to \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dies definiert eine differenzierbare 1–Form α_X durch

$$\alpha_X(v) = \langle X(x), v\rangle \quad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass

$$d\alpha_X = \mathrm{rot}(X) \lrcorner (e^1 \wedge e^2 \wedge e^3)$$

für die Rotation, $\mathrm{rot}(X)$, des Vektorfeldes gilt (siehe Übungsblatt 0 für eine Definition).
(2) Definieren Sie $\mathrm{rot}(X)$ für ein differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ in diesem Sinne. Was ist das für ein mathematisches Objekt?
(3) Definieren Sie $\mathrm{rot}_M(X)$ für ein differenzierbares Vektorfeld auf einer orientierten, differenzierbaren 2–dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$, indem Sie das durch $\mathbb{R}^N$ induzierte Skalarprodukt auf den Tangentialräumen und die zugehörige Volumenform benutzen.

Aufgabe Ü3
Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $\lambda \in \Omega^1(U)$ eine glatte 1-Form auf U. Sei γ eine stetige Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ von $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$, die stückweise differenzierbar ist, d.h. es existieren $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1} = b$, so dass $\gamma|_{[}t_k, t_{k+1}]$ stetig differenzierbar ist. Unter dem Kurvenintegral von λ über γ verstehen wir das Integral

$$\int_\gamma \lambda := \int_a^b \lambda_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt$$

wobei der Integrand überall, wo er nicht existiert einfach gleich Null gesetzt wird. Zeigen Sie
(a) Ist $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ mit $\tau[c, d] \to [a, b]$ stetig, stückweise differenzierbar sowie $\tau(c) = a$ und $\tau(d) = b$, dann ist $\int\limits_\gamma \lambda = \int \tilde{\gamma}\lambda$.
(b) Ist λ exakt, d.h. es existiert eine glatte relle Funktion f auf U mit $df = \lambda$, so hängt das Kurvenintegral nur von den Endpunkten $x, y \in U$ nicht vom gewählten Weg dazwischen ab.
(c) Sei U wegzusammenhängend, d.h. insbesondere existiert immer ein Weg zwischen Punkten $x, y \in U$ wie oben beschrieben. Hängt dann das Kurvenintegral nur vom Anfangs-und Endpunkt und nicht vom Weg ab, so ist λ exakt.
(d) Sei λ geschlossen, d.h. $d\lambda = 0$ und U konvex. Dann ist λ auch exakt.
Hinweis: Sie dürfen den Fakt verwenden, dass man für eine glatte Funktion φ auf $\mathbb{R}^3$ Integration über eine Variable und partielle Ableitung bezüglich einer anderen vertauschen kann.