Übungsblatt 11

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 24.01.2017

Aufgabe 1 (4+2+2+2 Punkte)
(1) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $p \in U$ und $\omega \in \Omega^{n-1}(U \setminus \{p\})$ eine stetig differenzierbare geschlossene Differentialform, d.h. $d\omega = 0$. Seien $A, B \subset U$ Gebiete mit glatten Rändern, die auch in U liegen und die p enthalten. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Stokes

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{\partial B} \omega.$$

Hinweis: Betrachten Sie eine hinreichend kleine Kugel um p. Ein "Gebiet $A \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand" ist eine n–dimensionale Untermannigfaltigkeit, deren Rand, ∂A, mit dem topologischen Rand übereinstimmt.
(2) Das Integral einer Funktion über Jordanmessbare Teilmengen ist das Integral über Real- plus i-mal das Integral über den Imaginärteil. Analoges gilt für komplex-wertige Differentialformen. Die 1-Form dz ist außerdem definiert als $dz = dx + \mathrm{i}dy$. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und holomorph, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Stokes für jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset U$ mit glattem Rand $\partial\Omega = \Gamma$
(a) $\int_\Gamma f dz = 0$,
(b) für jedes $z \in \Omega \setminus \Gamma$ ist $f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz$,
(c) für jedes $z \in U \setminus \Omega$ ist $\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz = 0$.
Hinweis: (1) ist nützlich für (b): Drücken Sie das Integral für $\Omega' = \Delta(z;r)$, d.h. die Kreisscheibe um z_0 und die Parametrisierung $\gamma : [0,1] \to \partial\Delta(z;r)$ gegeben durch $\gamma(t) = e^{2\pi \mathrm{i} t}$ aus. Betrachten Sie dann den Grenzwert für $r \to 0$.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)
(a) Beweisen Sie die Existenz der Zerlegung der Eins einer kompakten Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$. Sie können dabei wie folgt vorgehen:
(i) Zeigen Sie, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass für jeden Punkt $x \in M$ für den euklidischen Ball in $\mathbb{R}^N$ $B(x;2r) \cap M$ in einer Koordinatenumgebung enthalten ist. Zeigen Sie dann, dass es endlich viele solche Bälle, $B(x_i;2r)$ gibt, so dass die Bälle vom Radius r, $B(x_i;r)$ M überdecken.
(ii) Seien $\tilde{\mu}_i$ glatte Funktionen auf $\mathbb{R}^N$, die außerhalb von $B(x_i;2r)$ verschwinden und auf $B(x_i;r)$ konstant 1 sind. Konstruieren Sie daraus die Zerlegung der Eins und weisen Sie alle geforderten Eigenschaften nach.
(b) Zeigen Sie für eine k–Form α auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$: α ist C^ℓ genau dann, wenn es eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^N$ und eine C^ℓ k-Form $\tilde{\alpha}$ auf W gibt mit $i^*\tilde{\alpha} = \alpha$ für die Einbettung $i : M \to W$. Hinweis: Benutzen Sie eine geignete Zerlegung der Eins.

Aufgabe 3 (4+3+3 Punkte)
Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $\varphi : B^n \to B^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung des abgeschlossenen Einheitsballes im $\mathbb{R}^n$ auf sich, so besitzt Φ einen Fixpunkt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:
(a) Angenommen, es gibt keinen solchen Fixpunkt. Dann definieren wir $\Phi : B^n \to S^{n-1} = \partial B^n$ wie folgt: $\Phi(x)$ ist der Schnittpunkt der Geraden durch x und $\varphi(x)$ mit der Sphäre, der x am nächsten liegt. Fertigen Sie eine Skizze an. Zeigen Sie, dass Φ stetig differenzierbar ist.
(b) Sei $\mu \in \Omega^{n-1}(S^{n-1})$ die Volumenform bezüglich einer der beiden Orientierungen. Zeigen Sie, dass $\Phi^*\mu \in \Omega^{n-1}(B^n)$ geschlossen ist, d.h. $d\Phi^*\mu = 0$.
(c) Wenden Sie nun den Satz von Stokes an und diskutieren Sie, warum dies einen Widerspruch zur Annahme ergibt.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 17.01-19.01 besprochen werden:

Aufgabe Ü1
(a) Zeigen Sie (analog zum Divergenzsatz von Gauß in der Vorlesung), wie aus dem Satz von Stokes für Differentialformen der klassische Satz von Stokes über die Rotation von Vektorfeldern folgt.
(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein kompaktes Gebiet mit glattem Rand, Sei Δ der Laplace-Operator bzw. den Gradienten auf $\mathbb{R}^n$. Außerdem sei $\mathbf{n} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ das Feld der äußeren Normalen. Zeigen Sie für stetig diffenzierbare Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\int_\Omega (g\Delta f - f\Delta g) dx_1 ... dx_n = \int_{\partial\Omega} ((g\mathbf{n}(f) - f\mathbf{n}(g)) d(\partial\Omega),$$

wobei $\mathbf{n}(f)(x)$ die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{n}(x)$ in x notiert.
Hinweis: $\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f)$ wobei ∇f der Gradient von f ist.

Aufgabe Ü2
(a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offenes beschränktes Gebiet mit glattem, zusammenhängendem Rand und $\gamma : [a, b] \to \partial\Omega$ eine orientierte Parametrisierung, d.h. $\gamma'(t) \neq 0$ überall, γ surjekitv und $\gamma|_{[a,b)}$ injektiv. Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Stokes

$$\mathrm{area}(\Omega) = \int_a^b x(t) y'(t) dt$$

(b) Berechnen Sie die rechte Seite für den Fall, dass Ω ein Polygon ist und γ stetig und stückweise lineare/affine Parametrisierung der Seiten ist.
(c) Argumentieren Sie, dass im Fall (b) immer noch die Gleichheit in (a) gilt.

Aufgabe Ü3
Zeigen Sie für eine k–Form α auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$: α ist C^ℓ genau dann, wenn es für jeden Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^N$ von x und eine C^ℓ k-Form $\tilde{\alpha}$ auf U gibt mit $i^*\tilde{\alpha} = \alpha$ für die Einbettung $i : M \cap U \to U$.

Aufgabe Ü4
Beschreiben Sie das Möbiusband explizit als Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, indem Sie geeignete Strecken der Länge kleiner als 2 mit Mittelpunkt auf $\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ betrachten (wie in der Vorlesung diskutiert). Zeigen Sie, dass diese Untermannigfaltigkeit nicht orientierbar ist.