Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 12

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 31.01.2017

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)
(i) Wir bezeichnen für ein Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$ mit $|I| = b - a$ die Intervalllänge. Zeigen Sie: Ist $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von offenen Intervallen mit $[0, 1] \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, dann gilt $\sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n| \geq 1$. *Hinweis:* Betrachten Sie zunächst den Fall einer endlichen Familie $I_1, \ldots, I_N$.
(ii) Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge. Beweisen Sie, dass A keine Vitali-Menge V enthalten kann. *Hinweis:* Betrachten Sie die Menge $\cup_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}}(q + A)$ und benutzen Sie (i).

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)
(i) Zeigen Sie: Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra und $f : X \to Y$ eine Abbildung, dann ist $f_*\mathcal{A} := \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine σ-Algebra.
(ii) Für eine Teilmenge $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ist die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ definiert als der Durchschnitt aller σ-Algebren $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ bzw. $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Menge aller offenen bzw. abgeschlossenen Teilmengen eines metrischen Raums (X, d), dann gilt

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(X)).$$

Aufgabe 3 (2+4+4 Punkte)
(i) Es sei X eine abzählbar unendliche Menge und $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ ist endlich oder } X \setminus A \text{ ist endlich}\}$.
(a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{A} \neq \mathcal{P}(X)$ ist.
(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Algebra ist und entscheiden Sie, ob $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Sei X eine beliebige Menge und $\mathcal{E} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ eine abzählbare Familie nicht-leerer paarweise disjunkter Teilmengen von X, so dass $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ gilt. Bestimmen Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ (siehe Aufgabe 2 (ii)). Begründen Sie!

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 24.01-26.01 besprochen werden:

Aufgabe Ü1 Wiederholen Sie die Konstruktion der allgemeinen Cantor-Mengen und zeigen Sie, dass diese überabzählbare Borel-Nullmengen sind.

Aufgabe Ü2
Zeigen Sie: Der Durchschnit $\mathcal{A} = \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ einer beliebigen Familie von σ-Algebren $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist wieder eine σ-Algebra.

Aufgabe Ü3 Wiederholen Sie den Begriff eines topologischen Raums. Zeigen Sie: Falls X ein Hausdorff-Raum ist, so dass die Menge $\mathcal{O}(X)$ der offenen Teilmengen von X eine Algebra ist, dann ist bereits $\mathcal{O}(X) = \mathcal{P}(X)$. Gilt diese Aussage auch ohne die Voraussetzung der Hausdorff-Eigenschaft?

Aufgabe Ü4 Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{R}_n \subset \mathbb{R}^n$ der Figuren einen Ring bildet.

Definiere für einen halboffenen Quader $Q = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{vol}(Q) := (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

und für eine Vereinigung $A = Q_1 \cup \cdots \cup Q_m$ von paarweise disjunkten halboffenen Quadern $v_n(A) := \mathrm{vol}(Q_1) + \ldots \mathrm{vol}(Q_n)$ ($v_n(\emptyset) := 0$). Zeigen Sie, dass v_n ein wohldefinierter σ-Inhalt auf $\mathcal{R}_n$ ist.