Übungsblatt 13

Analysis III WS 2016/17

Musterlösung

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)
Sei $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(i) Für ein $B \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mu(B) < \infty$ sei $\mu_B : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ definiert durch $\mu_B(A) = \mu(A \cap B)$. Zeigen Sie, dass μ_B wieder ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für $A_i \in \mathcal{A}, i = 1,\dots,n$ mit $\mu(A_i) < \infty$, sich das Maß der Vereinigung $A = \cup A_i$ durch folgende Formel berechnen lässt:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |J|=k}} \mu\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)$$

Lösung:

(i) Für $A = \emptyset$ gilt $\mu_B(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = 0$. Seien $A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$ disjunkte Teilmengen. Dann gilt

$$\mu_B\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i \cap B\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^\infty \mu_B(A_i).$$

Also ist μ_B ein Maß auf $\mathcal{A}$.

(ii) Wir beweisen die Aussage per Induktion über n. Der Fall $n = 1$ ist klar. Angenommen die Aussage gilt für $n < N$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) &= \mu\left(A_N \setminus \bigcup_{i=1}^{N-1} A_i\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N-1} A_i\right) \\
&= \mu(A_N) - \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N-1} A_N \cap A_i\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{N-1} A_i\right) \\
&= \mu(A_N) + \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-1} \left(\sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,N-1\} \\ |J|=k}} -\mu\left(A_N \cap \bigcap_{j\in J} A_j\right) + \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,N-1\} \\ |J|=k}} \mu\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)\right) \\
&= \mu(A_N) + \sum_{k=1}^{N-1} \left((-1)^k \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,N\} \\ |J|=k+1 \\ N \in J}} \mu\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) + (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,N-1\} \\ |J|=k}} \mu\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)\right)
\end{aligned}$$

Durch Umindizierung und den Fakt, dass entweder $J \subset \{1,\dots,N-1\}$ oder $N \in J$, ergibt sich dann

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \mu(A_N) + \sum_{j=1}^{N-1} \mu(A_j) + \sum_{k=2}^{N} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,N\} \\ |J|=k}} \mu\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ |J|=k}} \mu\left(\bigcap_{j \in J} A_j \right).$$

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)
(i) Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring auf X, μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ und μ^* das zugehörige äußere Maß. Sei $T : X \to X$ eine bijektive Abbildung, sodass $A \in \mathcal{R} \Leftrightarrow T(A) \in \mathcal{R}$ und $\mu(A) = \mu(T(A))$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

Zeigen Sie, dass dann auch $\mu^*(T(E)) = \mu^*(E)$ für alle $E \in \mathcal{P}(X)$ und A ist genau dann μ^*-messbar, wenn $T(A)$ μ^*-messbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Maß $\lambda_n : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ translationsinvariant ist, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt die Abbildung $T_x(y) = y + x$ die Bedingung aus (i). Folgern Sie, dass eine Vitali-Menge nicht Lebesgue-messbar sein kann.

Lösung:

(i) Sei $E \in \mathcal{P}(X)$ und $\epsilon > 0$. Nach Definition von μ gibt es $C_i \in \mathcal{R}, i \in \mathbb{N}$ sodass

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \quad \text{und} \quad \mu^*(E) + \epsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i).$$

Dann gilt $T(E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} T(C_i)$ und aus den Voraussetzungen und der Definition von μ^* folgt:

$$\mu^*(E) + \epsilon \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T(C_i)) \geq \mu^*(T(E)).$$

Für $\epsilon \to 0$ folgt $\mu^*(E) \geq \mu^*(T(E))$. Die umgekehrte Umgleichung folgt analog. Also ist $\mu^*(E) = \mu^*(T(E))$. Sei nun $A \in \mathcal{P}(X)$ μ^*-messbar. Dann gilt für alle $E \in \mathcal{P}(X)$, dass

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap T(A)) + \mu^*(E \cap T(A)^c) &= \mu^*(T^{-1}(E) \cap A) + \mu^*(T^{-1}(E) \cap A^c) \\ &= \mu^*(T^{-1}(E)) = \mu^*(E),\end{aligned}$$

d.h. $T(A)$ ist auch μ^*-messbar. Die Umkehrung folgt analog.

(ii) Für einen halboffenen Quader $Q = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ ist $T_x(Q) = \prod_{i=1}^{n} [a_i + x_i, b_i + x_i)$ wieder ein Quader und das Bild einer disjunkten Vereinigung von Quadern ist wieder disjunkt. Also induziert T_x eine Bijektion auf dem Ring der Figuren $\mathcal{R}_n$. Für die Volumen von Quadern gilt dann

$$\mathrm{vol}(T_x(Q)) = \prod_{i=1}^{n} (b_i + x_i - (a_i + x_i)) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \mathrm{vol}(Q).$$

D.h. T_x erhält den in der Übung konstruierten σ-Inhalt ν_n auf dem Ring der Figuren. Nach Definition entsteht das Lebesgue-Maß λ_n, durch die Caratheodory-Konstruktion aus dem σ-Inhalt ν_n. Aus Teil (i) folgt nun, dass λ_n invariant unter der Abbildung T_x bleibt.

Sei nun $V \subset [0, 1]^n$ eine Vitali-Menge und $B = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^n \cap [-1,1]^n} T_q(V)$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die obige Vereinigung disjunkt ist und dass

$$[0, 1]^n \subset B \subset [-1, 2]^n.$$

Angenommen V ist Lebesgue-messbar. Dann ist B auch Lebesgue-messbar und aus der Monotonie folgt

$$1 \leq \lambda_n(B) \leq 3^n.$$

Aber nach der Translationsinvarianz und der σ-Additivität folgt

$$\lambda_n(B) = \sum_{q \in \mathbb{Q}^n \cap [-1,1]^n} \lambda_n(T_q(V)) = \lambda_n(V) \sum_{q \in \mathbb{Q}^n \cap [-1,1]^n} 1.$$

Die Summe kann nur endlich sein, wenn $\lambda_n(V) = 0$. Dann folgt aber $\lambda_n(B) = 0$, im Widerspruch zu den obigen Ungleichungen. Also kann V nicht Lebesgue-messbar sein.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)
Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$ ein Maß, dass nur die Werte 0 oder 1 annimmt und $\mu(X) = 1$.

(i) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{P}(X) | \mu(A) = 1\}$$

folgende Bedingungen erfüllt:

a) $A \in \mathcal{U}, A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow B \in \mathcal{U}$;

b) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{U}$

c) $A \subseteq X \Rightarrow A \in \mathcal{U}$ oder $A^c \in \mathcal{U}$

(ii) Sei speziell $X = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Lösung: (i)

a) Für $A \in \mathcal{U}$ und $B \subseteq A$ folgt aus der Monotonie, dass $1 \geq \mu(B) \geq \mu(A) = 1$. Also ist $B \in \mathcal{U}$.

b) Seien zuerst $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$. Dann ist

$$1 = \mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2) = 2 - \mu(A_1 \cap A_2),$$

d.h $\mu(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{U}$. Per Induktion folgt, dass $\bigcap_{i=1}^N A_i \in \mathcal{U}$ für alle $A_i \in \mathcal{U}, i = 1, \ldots, N$. Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$. Dann ist

$$B_N = \bigcap_{n=1}^{N} A_n$$

eine monoton fallende Folge von Mengen aus $\mathcal{U}$. Da $\mu(B_1) = 1 < \infty$ können wir die Stetigkeit von oben anwenden:

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Also ist $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \in \mathcal{U}$.

c) Es gilt $1 = \mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$. Also ist entweder $\mu(A) = 1$ oder $\mu(A^c) = 1$.

(ii) Sei zuerst $B_n = [n, n + 1)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann bilden die B_n eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{R}$ und es gilt

$$1 = \mu(\mathbb{R}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Es gibt also genau ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\mu(B_k) = 1$. Sei nun $i \in \mathbb{N}$ und $A_i^l = [k + \frac{l-1}{2^i}, k + \frac{l}{2^i})$ für $l = 1, \ldots, 2^i$. Dann bilden die A_i^l eine disjunkte Zerlegung von $B_k = [k, k + 1)$ und es gilt

$$1 = \mu([k, k + 1)) = \sum_{l=1}^{2^i} \mu(A_i^l).$$

Also gibt es wieder genau ein $l_i \in \{1, \dots, 2^i\}$ mit $\mu(A_i^{l_i}) = 1$. Nach Konstruktion bilden die $A_{i+1}^{\tilde{l}}$ eine Verfeinerung der Überdeckung A_i^l. Aus der Monotonie muss dann folgen, dass

$$A_{i+1}^{l_{i+1}} \subset A_i^{l_i}.$$

D.h. die Mengen $\tilde{A}_i = A_i^{l_i}$ sind für $i \in \mathbb{N}$ monoton fallend und aus der Stetigkeit von oben folgt für $\tilde{A} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \tilde{A}_i$, dass

$$\mu(\tilde{A}) = \lim_{i \to \infty} \mu(\tilde{A}_i) = 1.$$

Insbesondere ist $\tilde{A}$ nicht leer. Sei also $x \in \tilde{A}$. Angenommen es gibt ein weiteres Element $y \in \tilde{A}$. Dann ist $|x - y| > 2^{-j}$ für ein $j \in \mathbb{N}$ und damit $y \notin A_j^{l_j}$, im Widerspruch zu $y \in \tilde{A}$. Also gilt

$$1 = \mu(\tilde{A}) = \mu(\{x\}).$$

Aus der Monotonie folgt dann für beliebige $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$,

$$x \in A \Rightarrow \mu(A) = 1$$

und

$$x \notin A \Rightarrow x \in A^c \Rightarrow \mu(A) = \mu(\mathbb{R}) - \mu(A^c) = 0.$$