Übungsblatt 15

Analysis III WS 2016/17

ohne Abgabe

Aufgabe 1
(i) Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Zeigen Sie, dass f uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar ist.

(ii) Sei $f : (0,1)^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$F(x_0) = \int_0^1 f(x_0, y)dy \quad \text{und} \quad G(y_0) = \int_0^1 f(x, y_0)dx$$

für $x_0, y_0 \in (0,1)$ wohldefiniert und Lebesgue-integrierbar sind, aber dass gilt

$$\int_0^1 F(x)dx = \frac{\pi}{4} \neq -\frac{\pi}{4} = \int_0^1 G(y)dy.$$

Hinweise: Zeigen Sie, dass $f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan(\frac{x}{y})$ und differenzieren Sie unter dem Integral.

Aufgabe 2
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\int_0^x \int_0^{x_1} (x_1 - t)^N f(t)dtdx_1 = \int_0^x \int_t^x (x_1 - t)^N f(t)dx_1 dt$.

Aufgabe 3
Sei $\phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann Lebesgue-integrierbar ist, falls $(f \circ \phi) \cdot |\det d\phi| : U \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar ist und dass dann:

$$\int_V f d\lambda_n = \int_U (f \circ \phi) \cdot |\det d\phi| d\lambda_n.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mu_1 : \mathcal{L}(U) \to [0, \infty], &\quad \mu_1(A) = \int_A |\det d\phi| d\lambda_n \\ \mu_2 : \mathcal{B}(U) \to [0, \infty], &\quad \mu_2(A) = (\phi^{-1})_* \lambda_n(A) = \lambda_n(\phi(A)) \end{aligned}$$

σ-endliche Maße definieren. Aus der Analysis II ist bekannt, dass μ_1 und μ_2 auf den Jordan-messbaren Mengen übereinstimmen, also insbesondere auf dem Ring der Figuren. Schließen Sie daraus, dass μ_2 mit der Einschränkung von μ_1 auf : $\mathcal{B}(U)$ übereinstimmt und folgern Sie, dass die Vervollständigung von $\mathcal{B}(U)$ bzgl. μ_2 $\mathcal{L}(U)$ enthält. Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe Ü4 der Rückseite.
Begründen Sie schließlich, dass diese Algebren übereinstimmen und folgern Sie die Aussage über die Integrierbarkeit von $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 14.02.-16.02. besprochen werden:

Aufgabe Ü1. Diskutieren Sie (ohne Beweis) das Verhältnis von Lebesgue- und Riemann-Integrierbarkeit. (Siehe Satz 11.31 und 11.32 des Skripts von Prof. Baum.)

Aufgabe Ü2. Seien $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ die Borel- bzw. Lebesgue-messbaren Mengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(i) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_2}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

(ii) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_2}) \subsetneq \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_1+n_2})$

(iii) $\lambda_{n_1+n_2}(A \times B) = \lambda_{n_1}(A) \cdot \lambda_{n_2}(B)$ für alle $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_1}), B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_2})$.

Geben Sie ein Beispiel für eine Lebesgue-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, die nicht $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_1}) \otimes \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n_2})$-messbar ist.

Aufgabe Ü3. Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar und für $x \in [a, b]$ sei

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad G(x) = \int_a^x g(t)dt.$$

Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Aufgabe Ü4. Seien $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ zwei messbare Räume und $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ ein Maß auf $\mathcal{B}$. Für eine $\mathcal{B} - \mathcal{A}$-messbare Abbildung $T : Y \to X$ sei

$$T_*\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty], \qquad T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)).$$

Zeigen Sie:

(i) $T_*\mu$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$.

(ii) Für $T_*\mu$-integrierbare Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist $f \circ T$ μ-integrierbar und es gilt:

$$\int_X f d(T_*\mu) = \int_Y f \circ T d\mu.$$

(iii) Bezeichnen $\overline{\mathcal{B}}$ die Vervollstndigung von $\mathcal{B}$ bzgl. μ und $\mathcal{A}$ die Vervollständigung bzgl. $T_*\mu$, so ist T auch $\overline{\mathcal{B}} - \overline{\mathcal{A}}$-messbar.