Übungsblatt 2

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 08.11.2016

Aufgabe 1 (10 Punkte)
Ermitteln Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems mithilfe der Iteration von Picard und Lindelöf: $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ und

$$x'(t) = -y(t)$$
$$y'(t) = x(t).$$

Aufgabe 2 (2+4+4 Punkte)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x''(t) = -U'(x(t)), \quad x(0) = x_0, x'(0) = v_0,$$

wobei $U : D \to \mathbb{R}$ eine gegebene stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ ist und $x_0 \in D, v_0 \in \mathbb{R}$.
(i) Beweisen Sie, dass der Ausdruck

$$E(x)(t) := \frac{x'(t)^2}{2} + U(x(t))$$

für jede Lösung der Differentialgleichung konstant in t, also eine Erhaltungsgröße ist.
(ii) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $0 \in I$ und $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$, $v_0 \neq 0$. Weiterhin sei $x : I \to \mathbb{R}$, $U(x(t)) < E$ für alle $t \in I$ wobei $E = U(x_0) + \frac{v_0^2}{2}$. Dann ist x genau dann eine Lösung des obigen Anfangswertproblems mit $x(0) = x_0$ und $x'(0) = v_0$, wenn x eine Lösung des Anfangswertproblems $x'(t) = \sqrt{2(E - U(x(t))}$ mit $x(0) = x_0$ ist, wobei $E = U(x_0) + \frac{v_0^2}{2}$ ist. Welche Richtung ist noch korrekt, wenn $U(x(t)) = E$ für t zugelasssen ist? Finden Sie ein Gegenbeispiel für die andere Richtung.
(iii) Lösen Sie das Anfangswertproblem mithilfe von (ii) für den Fall $U(x) = -\frac{1}{x}$ für $D = (0, \infty)$. Hinweis: Für das dabei auftauchende Integral brauchen Sie keinen Lösungsweg anzugeben. Für welche Anfangswerte x_0, v_0 existiert eine Lösung auf $[0, \infty)$?

Aufgabe 3 (3+4+3 Punkte)
Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'(t) = -y(t) - x(t)^3$$
$$y'(t) = x(t) - y(t)^3,$$

für differenzierbare Funktionen $x, y : I \to \mathbb{R}$.
(i) Zeigen Sie für die Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(t) = H(x(t), y(t)) = x(t)^2 + y(t)^2$ entlang jeder Lösung (x, y) der Differentialgleichung die Ungleichung

$$-2h(t)^2 \leq h'(t) \leq -h(t)^2.$$

(siehe auch Übungsblatt 1, Aufgabe 3).
(ii) Folgern Sie daraus, dass jede maximale Lösung der Differentialgleichung auf einem Intervall der Form (c, ∞) definiert ist, wobei $c \in \mathbb{R}$.
(iii) Untersuchen Sie mithilfe von (i) das Verhalten einer beliebigen Lösung für $t \to \infty$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen am 1.11. und 3.11. besprochen werden:

Aufgabe Ü1

Seien e_1, e_3 der erste und letzte Vektor der Standardbasis in $\mathbb{R}^3$. Sei $x : I \to \mathbb{R}^3$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$x''(t) = \mu e_1 \times x'(t) - g e_3,$$

wobei $\mu, g \in \mathbb{R}$ gegebene reelle Zahlen sind und $e_1 \times x'(t)$ das Kreuz-Produkt von Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass dann x_1' und $E := g x_3 + \frac{\|x'\|^2}{2}$ für Lösungen der Gleichung konstant sind. Was bedeutet das physikalisch/geometrisch?

Aufgabe Ü2

(a) Wiederholen Sie die Aussagen vom Satz über die Eindeutigkeit sowie dem Existenzsatz von Picard-Lindelöf für Anfangswertprobleme. Diskutieren Sie die Voraussetzungen. Wie groß können die Intervalle in den Aussagen höchstens sein (z.B. in Abhängigkeit von der offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$? Was geht bei der Differentialgleichung $x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$ schief?
(b) Ermitteln Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems mithilfe der Iteration von Picard und Lindelöf: $x : I \to \mathbb{R}$, $x(t_0) = x_0$

$$x'(t) = a x(t)$$

für ein $t_0 \in I$ und $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe Ü3

Beweisen Sie die Gronwallsche Ungleichung für $t \leq t_0$: Gilt für eine stetige Funktion $g : I \to [0, \infty)$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ für gewisse reelle Zahlen $A, B \geq 0$ und $t_0 \in I$

$$g(t) \leq A \left| \int_{t_0}^{t} g(s) ds \right| + B$$

für alle $t \in I$, so gilt

$$g(t) \leq B e^{A|t-t_0|}.$$

Aufgabe Ü4

(a) Was ist eine maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}^\ltimes$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung $x' = F(x.t)$? Falls F stetig und lokal Lipschitz ist: warum ist dann I solch einer Lösung immer ein offenes Intervall?

Siehe Vorlesung am 1.11. - (b) und (c) können ggf. auch erst in der nächsten Übung besprochen werden
(b) Sei $x : I \to \mathbb{R}^n$ eine maximale Lösung wie in (i), $F : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig und lokal LIpschitz. Was kann man dann über die Menge $\{(x(t), t) \mid t \in I\} \subset U$ topologisch aussagen?
(c) Beweisen Sie die folgende Aussage aus der Vorlesung: Ist $U = \mathbb{R}^n \times I$ für ein Intervall I und gibt es stetige Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$, so dass

$$\|F(x,t)\| \leq a(t)\|x\| + b(t)$$

für alle $t \in I$, so ist jede maximale Lösung auf ganz I definiert.