Übungsblatt 6

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 06.12.2016

Aufgabe 1 (4+6 Punkte)
a) Eine Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt eigentlich, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^m$ die Urbildmenge $f^{-1}(K) \subset U$ ebenfalls kompakt ist. Zeigen Sie: Die Bildmenge $f(U) \subset \mathbb{R}^m$ einer injektiven eigentlichen Immersion ist eine Untermannigfaltigkeit.
Hinweis: 1.) Zeigen Sie zunächst, dass f ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.
2.) Sei dann $x \in U$ fixiert. Betrachten Sie die folgende Abildung $\Phi : U \times \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^N$: Man wähle Vektoren $v_1, ..., v_{N-n} \in \mathbb{R}^N$, so dass $\text{span}\{v_1; ...; v_{N-n}\} + d_x f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^N$. Die Abbildung ist dann definiert als

$$\Phi(y, z) := f(y) + \sum_{j=1}^{N-n} z_j v_j.$$

Zeigen Die, dass Φ die Voraussetzungen des Satzes über die Umkehrabbildung erfüllt und beweisen Sie mit deren Hilfe die Behauptung.
3.) Prüfen Sie am Ende, dass Ihr Beweis plausibel ist, indem Sie sich überzeugen, dass er im Allgemeinen für f mit injektivem Differential, die nicht eigentlich oder Homöomorphismen auf ihr Bild sind nicht funktioniert (siehe Gegenbeispiel aus der Vorlesung). Dieser Teil ist nur für Sie und muss nicht abgegeben werden.
b) Zeigen Sie, dass $\{A \in M(n, \mathbb{R}) : AA^T = I\} \subset M(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Bestimmen Sie die Dimension und den Tangentialraum in jedem Punkt.

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)
Wir definieren für $A, B \subset \mathbb{R}^m$ $\quad d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$.
a) Zeigen Sie:
i) Ist $M \subset \mathbb{R}^m$ eine Untermannigfaltigkeit und gilt für $y \in \mathbb{R}^m \setminus M$ und $x \in M$ die Gleichheit $\|x - y\| = d(M, \{y\})$, dann ist die Gerade $L(x, y)$ durch x und y orthogonal zum Tangentialraum $T_x M$.
ii) Sind $M, N \subset \mathbb{R}^m$ zwei disjunkte Untermannigfaltigkeiten und gilt $\|x - y\| = d(M, N)$ für zwei Punkte $x \in M$ und $y \in M$, dann ist die Gerade $L(x, y)$ durch x und y orthogonal zu sowohl $T_x M$, als auch $T_y N$.

b) Wir betrachten die Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}, B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \le 1\}.$$

Skizzieren Sie A und B und berechnen Sie $d(A, B)$.

Aufgabe 3 (4+3+3 Punkte)
Wir betrachten die n-dimensionale Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \ge 1$.Es bezeichne für $N = (0, \dots, 0, 1)$ und $S = (0, \dots, 0, -1)$

$$\pi_N : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n, \pi_S : S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$$

die stereographischen Projektionen, d. h. für $x \in S^n \setminus \{N\}$ (bzw. $x \in S^n \setminus \{S\}$) ist $(\pi_N(x), -1)$ (bzw. $(\pi_S(x), 1)$) der Schnittpunkt der Geraden durch N und x (bzw. der Geraden durch S und x) mit dem Unterraum $\mathbb{R}^n \times \{-1\}$ (bzw. $\mathbb{R}^n \times \{1\}$).
a) Finden Sie explizite Formeln für π_N und π_S.
b) Zeigen Sie, dass diese Abbildungen Karten der Untermannigfaltigkeit sind.
c) Berechnen Sie den Kartenübergang $\pi_S \circ \pi_N^{-1}$ und beschreiben Sie dabei die Menge, auf die dieser definiert ist.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 25.10-27.10 besprochen werden:

Aufgabe Ü1
Zeigen Sie: Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und $f : K \to \mathbb{R}^m$ injektiv, dann definiert f einen Homöomorphismus zwischen K und $f(K) \subset \mathbb{R}^m$. Skizzieren Sie ein Beispiel einer injektiven Immersion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, deren Bild keine Untermannigfaltigkeit ist.

Zeigen Sie, dass $\{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\} \subset M(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Bestimmen Sie die Dimension und den Tangentialraum in jedem Punkt.

Aufgabe Ü2
Diskutieren Sie notwendige und hinreichende Kriterien dafür, dass eine gegebene (zweimal differenzierbare) Funktion auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $x \in M$ ein Extremum annimmt.

Zeigen Sie: Unter allen n-dimensionalen Quadern, $n \geq 2$, mit gegebener Gesamtlänge der Kanten, ist das Volumen am größten im Fall wenn allen Kantenlängen gleich sind.

Aufgabe Ü3
Wir betrachten für $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a > 0$ die Teilmenge

$$Q_{a,b,c} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass $Q_{a,b,c}$ für jedes Tripel (a, b, c) eine Untermannigfaltigkeit ist und entscheiden Sie, welche der Untermannigfaltigkeiten $Q_{a,b,c}$ paarweise diffeomorph sind.

Aufgabe Ü4
(i) (Sphärische Koordinaten) Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : (-\pi, \pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to S^2$$

$$\Phi(\phi, \theta) := (\cos\phi \cos\theta, \sin\phi \cos\theta, \sin\theta).$$

Zeigen Sie, dass Φ eine Parametrisierung von S^2, also ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Erklären Sie für $x = \Phi(\phi, \theta)$ die Größen ϕ, θ geometrisch in Termen von x und erläutern Sie, wie man die Umkehrabbildung bestimmt. Beschreiben Sie das Bild $U \subset S^2$ von Φ und begründen Sie, dass (U, Φ) eine Karte auf S^2 definert.

(ii) Sei $f : S^2 \to \mathbb{R}_{>0}$ eine glatte Abbildung auf der zweidimensionalen Einheitsphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$. Beweisen Sie, dass $S^2_f := \{f(x) \cdot x : x \in S^2\} \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ist, welche diffeomorph ist zu S^2.