Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 7

Analysis III WS 2016/17

Abgabe: 13.12.2016

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)
(a) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine glatte (d.h. C^∞–)Untermannigfaltigkeit der Dimension n und $L \subset M$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent $k \leq n$:

(i) L ist eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$.

(ii) Für jeden Punkt $p \in L$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von p und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi(U \cap M) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \cap V$.

(iii) Für jeden Punkt $p \in L$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von p sowie eine glatte Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ für die $d_qF : T_qM \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv für alle $q \in U$ und $F^{-1}(0) = U \cap M$ ist.

(b) Seien M und $L \subset N$ glatte Untermannigfaltigkeiten und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung. Sei für jeden Punkt im Urbild $q \in f^{-1}(L)$ für das Differential $d_qf(T_qM) + T_{f(q)}L = T_{f(q)}N$ erfüllt. Beweisen Sie, dass $f^{-1}(L) \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit ist. Bestimmen Sie deren Dimension in Termen der Dimensionen der gegebenen Untermannigfaltigkeiten.

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)
Durch die Identifizierung $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ können wir S^3 als die Untermannigfaltigkeit

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$$

darstellen. Sei dann

$$p : S^3 \longrightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3, \quad p(z_1, z_2) = (2z_1\overline{z_2}, |z_1|^2 - |z_2|^2)$$

(a) Zeigen Sie, dass p eine Submersion $S^3 \to S^2$ induziert, d.h. dass das Differential $d_xp : T_xS^3 \to T_{p(x)}S^2$ surjektiv ist für alle $x \in S^2$.

(b) Konstruieren Sie Diffeomorphismen $p^{-1}(\{c\}) \cong S^1$ für alle $c \in S^2$.

Aufgabe 3 (3+3+4 Punkte)
(a) Seien X und Y zwei glatte Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass aus $X(p), Y(p) \in T_pM$ für $p \in M$ auch $[X, Y](p) \in T_pM$ folgt.

(b) Sei $X : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}, X(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$ die Einschränkung einer linearen Abbildung. Zeigen Sie, dass X genau dann ein glattes Vektorfeld auf S^n induziert, wenn A schiefsymmetrisch ist, d.h. $A^t = -A$.

(c) Sei X ein glattes Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ und $\tilde{X} : U \to \mathbb{R}^N$ eine glatte Erweiterung von X auf eine Umgebung U von M. Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ eine Integralkurve von $\tilde{X}$. Zeigen Sie, dass aus $\gamma(t_0) \in M$ für ein $t_0 \in I$ folgt, dass $\gamma(I) \subset M$. Folgern Sie, dass für M kompakt jede solche Integralkurve auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 6.12.-8.12. besprochen werden:

Aufgabe Ü1. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension k. Das Tangentialbündel von M ist

$$TM = \{(p,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N | p \in M, v \in T_pM\}.$$

Sei $\phi = (x_1, \ldots, x_k) : U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^k$ eine Karte von M. Die Koordinatenvektorfelder assoziert zu ϕ sind definiert als

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = d_{\phi(p)}\phi^{-1}(e_i) = \frac{d}{dt}\phi^{-1}(\phi(p) + te_i)\bigg|_{t=0}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\Phi : TU \subset TM \to V \times \mathbb{R}^k, \quad \Phi(p, \sum_{i=1}^k v_i \frac{\partial}{\partial x_i}(p)) = (\phi(p), v_1, \ldots, v_k)$$

eine Karte von TM ist. Also ist TM eine glatte Untermannigfaltigkeit der Dimension $2k$.

Aufgabe Ü2. Seien $\phi = (x_1, \ldots, x_k) : U \subset M \to V$ und $\psi = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k) : \tilde{U} \subset M \to \tilde{V}$ zwei Karten der k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M und $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}$ die dazugehörigen Vektorfelder. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})_j}{\partial x_i}(\phi(p))\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}(p), \text{ für } p \in U \cap \tilde{U}.$$

Berechnen Sie die zu den sphärischen Koordinaten

$$\begin{aligned} F :&(0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \\ F(r,\phi,\theta) &= (r\cos\phi\cos\theta, r\sin\phi\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

gehörigen Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi}$ und $\frac{\partial}{\partial \theta}$.

Aufgabe Ü3. Sei X ein glattes Vektorfeld auf der Untermannigfaltigkeit M. Eine Integralkurve von X ist eine glatte Kurve $\gamma : (a,b) \to M$, sodass $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ für alle $t \in I$. Zeigen Sie, dass es durch jeden Punkt $p \in M$ eine maximale Integralkurve gibt und wenn sich zwei maximale Integralkurven $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$ in einem Punkt schneiden, dann gilt dass $\gamma_2(t) = \gamma_1(t + t_0)$.

Aufgabe Ü4. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$. Zeigen Sie, dass $0 \in \mathbb{R}$ der einzige kritische Wert von F ist und konstruieren Sie Diffeomorphismen $F^{-1}(c_1) \cong F^{-1}(c_2)$ für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \text{sgn}(c_1) = \text{sgn}(c_2)$.

Gibt es einen Diffeomorphismus $F^{-1}(1) \cong F^{-1}(-1)$?