Übungsblatt 7

Analysis III WS 2016/17 Lösung

Aufgabe 3 (3+3+4 Punkte)
(a) Seien X und Y zwei glatte Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie, dass aus $X(p), Y(p) \in T_pM$ für $p \in M$ auch $[X, Y](p) \in T_pM$ folgt.

(b) Sei $X : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}, X(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$ die Einschränkung einer linearen Abbildung. Zeigen Sie, dass X genau dann ein glattes Vektorfeld auf S^n induziert, wenn A schiefsymmetrisch ist, d.h. $A^t = -A$.

(c) Sei X ein glattes Vektorfeld auf der Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ und $\tilde{X} : U \to \mathbb{R}^N$ eine glatte Erweiterung von X auf eine Umgebung U von M. Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$ eine Integralkurve von $\tilde{X}$. Zeigen Sie, dass aus $\gamma(t_0) \in M$ für ein $t_0 \in I$ folgt, dass $\gamma(I) \subset M$. Folgern Sie, dass für M kompakt jede solche Integralkurve auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Lösung:(a) Zunächst einmal soll bemerkt werden, dass die Aufgabe etwas präziser wie folgt gemeint ist:

Zeigen Sie, dass aus $X(p), Y(p) \in T_pM$ für *alle* $p \in M$ auch $[X, Y](p) \in T_pM$ folgt.

Wir benutzen folgende Charakterisierung von Vektorfeldern, die tangential an M sind:
(i) Sei $p \in M$, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion auf einer offenen Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, die konstant auf $U \cap M$ ist. Ist dann $X \in T_pM \subset \mathbb{R}^n$, so ist $X(f) := d_pf(X) = 0$.
(ii) Sei $p \in M$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Umgebung, $F : U \to \mathbb{R}^k$ stetig differenzierbar, so dass $M \cap U = F^{-1}(0)$ und $d_xF : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ist surjektiv für alle $x \in U$, d.h. M ist implizit durch F beschrieben, $\dim M = n - k$. Dann gilt für $p \in M$ und $X \in \mathbb{R}^n$: ist $X(F) = d_pF(X) = 0$, dann ist $X \in T_pM$.

Seien nun X, Y glatte Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$, die für alle $p \in M$ tangential an M sind und $F : U \to \mathbb{R}^k$ wie in (ii). Dann folgt $X(F)(p) = Y(F)(p) = 0$ für alle $p \in M$, indem man (i) auf jede Komponente von F anwendet. Mit $X(F), Y(F) : U \to \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die differenzierbaren Funktionen. Damit ergibt sich für alle $p \in M$

$$d_pF([X, Y]) = X_p(Y(F)) - Y_p(X(F)) = X_p(0) - Y_p(0) = 0.$$

Mit (ii) ergibt sich daraus $[X, Y]_p \in T_pM$.

(b) Bezeichne $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ die Funktion $F(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + ... + x_{n+1}^2$. Dann $d_xF : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ nicht Null, also insbesondere surjektiv, falls $x \neq 0$, $F^{-1}(1) = S^n$ und $\mathrm{Ker}(d_xF) = T_xS^n$ für alle $x \in S^n$. Nun ist $d_xF(v) = \frac{1}{2}\langle x, v\rangle$ und somit $Ax \in T_xS^n$ für alle $x \in S^n$, falls

$$\langle x, Ax\rangle = 0$$

für alle $x \in S^n$ und damit für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Daraus folgt für $x, y \in S^n$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (x-y), A(x-y)\rangle = \langle x, Ax\rangle + \langle y, Ay\rangle - \langle x, Ay\rangle - \langle y, Ax\rangle \\ &= -\langle x, Ay\rangle - \langle y, Ax\rangle, \end{aligned}$$

und somit für alle $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\langle x, Ay \rangle = -\langle y, Ax \rangle,$$

d.h. A ist antisymmetrisch.

(c) Für die Lösung γ sei $J \subset I$ die Teilmenge des Intervalls I

$$J := \{t \in I \mid \gamma(t) \in M\}.$$

J ist nichtleer, da $t \in t_0$. Sei $t_1 \in J$, $U \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Umgebung von $\gamma(t_1)$, und $\psi : V \to U \cap M$ ein Diffeomrphismus, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gibt es ein glattes Vektorfeld $Y : V \to \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x \in U \cap M$, $X(x) = d_{\psi^{-1}(x)}\psi(Y(\psi^{-1}(x)))$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, und eine (eindeutige) Lösung $\alpha : (t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon) \to V$ der Differentialgleichung

$$\dot{\alpha}(t) = Y(\alpha(t))$$

mit Anfangswert $\alpha(t_1) = \psi^{-1}(\gamma(t_1))$. Via Kettenregel ergibt sich für $\beta := \psi \circ \alpha$

$$\dot{\beta}(t) = d_{\alpha(t)}\psi(\dot{\alpha}(t)) = d_{\alpha(t)}\psi(Y(\alpha(t)) = X(\psi(alpha(t)) = X(\beta(t)),$$

d.h. β erfüllt dieselbe Differentialgleichung wie γ und $\beta(t_1) = \psi(\alpha(t_1)) = \gamma(t_1)$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich

$$\beta|_{(t_1-\epsilon,t_1)} = \gamma|_{(t_1-\epsilon,t_1}$$

und da $\beta(t) \in M$ für alle t nach Konstruktion, folgt $(t_1 - \epsilon, t_1 + \epsilon \cap I \subset J$ und J ist somit offen. Ist schließlich $(t_n)_n \subset J$ eine Folge die gegen ein $t \in I$ konvergiert, so konvergiert $\gamma(t_n)$ gegen ein $x \in \mathbb{R}^N$. Präzisiert man in der Aufgabenstellung, dass $M \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen ist, so ergibt sich $x = \gamma(t) \in M$ und somit ist J abgeschlossen. Da Intervalle zusammenhängend sind, folgt, dass $J = I$.

Ist $M \subset \mathbb{R}^N$ kompakt, so ist $M \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen und die obige Situation tritt ein. Außerdem ist M beschränkt so dass nun jede Lösung $\gamma : I \to M$ beschränkt ist, also ist das maximale Intervall für eine solche Lösung $I = \mathbb{R}$.