# Fragen zur Prüfungsvorbereitung

## Analysis III WS 2016/17

Neben den hier angegebenen Themen können auch Problemstellungen, die auf den Übungszetteln gestellt wurden, Gegenstand von Prüfungsfragen sein.

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

(1) Erläutern Sie, was eine Differentialgleichung in $\mathbb{R}^n$ und was ein Anfangswertproblem ist. Zeigen Sie, wie sich jedes Anfangswertproblem einer Differentialgleichung höherer Ornung in eines erster Ordnung umformen lässt.

(2) Lösen Sie ein Ihnen vorgelegtes Anfangswertproblem mit einer der Ihnen (aus der Vorlesung) bekannten Methoden.

(3) Unter welchen Annahmen an das Anfangswertproblem kann man Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zeigen? Beweisen Sie die von Ihnen gemachten Aussagen. Welche Einschränkung gibt es an die Lösung?

(4) Was ist eine maximale Lösung eines Anfangswertproblems? Unter welchen Bedingungen ist eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert? Wie hängt die Lösung von den Anfangswerten ab? Erläutern Sie den Beweis der Aussage.

(5) Welche spezielle Eigenschaften haben Lösungsräume homogener linearer Differentialgleichungen? Wie können Sie das ausnutzen, um lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten aber variablen Absoluttermen zu lösen?

(6) Welche Stabilitätseigenschaften von Nullstellen von Vektorfeldern kennen Sie und welche Aussagen gibt es über das Verhalten von Lösungen in der Nähe solcher Nullstellen? Beweisen Sie diese.

## Untermannigfaltigkeiten

(1) Was ist eine Untermannigfaltigkeit? Definieren Sie dafür alle benötigten Begriffe, wie Karten und Parametrisierungen und geben Sie ein Beispiel an und prüfen Sie an diesem die Bedingungen nach..

(2) Wann nennt man Abbildungen zwischen Untermannigfaltigkeiten differenzierbar? Was ist das Differential einer solchen Abbildung? Was sind differenzierbare Vektorfelder?

(3) Erläutern Sie das Riemannsche Integral auf einer Untermannigfaltigkeit. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Sphäre.

(4) Was ist eine Untermannigfaltigkeit mit Rand? Formulieren Sie die klassischen Integralsätze. Zeigen Sie, wie diese aus dem Satz von Stokes über Differentialfromen folgen.

(5) Definieren Sie den Begriff der Differentialformen auf $\mathbb{R}^n$. Beschreiben Sie das Wedge-Produkt, das äußere Differential und beweisen Sie die Leibniz-Regeln. Wie orientiert man eine Mannigfaltigkeit? Wie induziert die Orientierung einer Mannigfaltigkeit mit Rand den Rand?

(6) Was ist das Integral einer Differentialform über einer orientierten Untermannigfaltigkeit? Formulieren Sie den Satz von Stokes mit Differentialformen. Erläutern Sie, wie er bewiesen wird.

## Maß- und Integrationstheorie

(1) Welche Eigenschaften sollte ein Volumen-Begriff für Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ haben? Beschreiben Sie die Vitali-Menge und erläutern Sie, was aus diesem Beispiel folgt. Was ist ein Maß? Erklären Sie alle dafür notwendigen Begriffe. Geben Sie ein Beispiel ein (das darf auch einfach sein)

(2) Erklären Sie die Konstruktion von Maßen nach Caratheodory. Welche Eigenschaften haben solche Maße? Beweisen Sie diese. Erläutern Sie dabei den Begriff der Nullmengen und des vollständigen Maßraumes.

(3) Was ist die Borelalgebra eines metrischen Raumes? Was besagt der Hahnsche Fortsetzungssatz? Beweisen Sie ihn.

(4) Was sind Borel-messbare Mengen des $\mathbb{R}^n$? Definieren und charakterisieren Sie die Lebesgue-messbaren Mengen. Beweisen Sie die gemachten Aussagen.

(5) Erläutern Sie die Definition des Integrals messbarer Funktionen über einem Maßraum. Welche Eigenschaften hat dieses Integral? Formulieren Sie die dafür notwendigen Integralsätze und beweisen Sie diese.

(6) Formulieren und beweisen Sie den Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue. Zeigen Sie, dass die Voraussetzung scharf sind indem Sie ein geeignetes Gegenbeispiel angeben.

Für die Vorbereitung auf die Prüfung empfehle ich Ihnen, sich auch mit hier nicht aufgeführten Themen (wie z.B. der Konstruktion von Produktmaßen zu beschäftigen), da dies zur Vertiefung des geforderten Wissens beiträgt. Außerdem behalte ich mir vor, Studierende zur Erlangung der Note "Sehr Gut" danach zu fragen.