Lösung Blatt 6 Aufgabe 1

Da wir die entsprechenden Aussage (noch) nicht in der Vorlesung bewiesen haben, zeige ich:
(1) Die Krümmung $\kappa(v, n)$ in Richtung $v \in T_pF$ bei gewählter Normale n hängt nur von v und nicht von der Wahl einer glatten Kurve in F, die tangential an v ist, ab.
(2) $\kappa(v, n)$ ist eine quadratische Form in v. Folglich ist das Produkt von kleinstem und größtem Wert von $\kappa(., n)$ die Determinante der zugehörigen Gramschen Matrix.
(3) Die zugehörige lineare Abbildung ist die Weingartenabbildung.

Sei $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to F$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$ und $\|\dot\gamma\| \equiv 1$. Dann gilt

$$\langle \ddot\gamma, n\rangle = \langle \nabla^0_V V, n\rangle_p = V\langle V, n\rangle - \langle V, \nabla^0_V n\rangle|_p$$

Dabei ist v zu einem Vektorfeld V entlang von F ausgedehnt (lokal) und $\nabla^0 X$ das Differential jeder Komponente des Vektorfeldes X auf $\mathbb{R}^3$ (d.h. die triviale kovariante Ableitung). Nun ist $\langle V, n\rangle \equiv 0$, da n senkrecht auf F steht. Also ist

$$\langle \ddot\gamma, n\rangle = \langle V, -\nabla^0_V n\rangle|_p =: \langle v, L(v)\rangle,$$

wobei L die Weingarten-Abbildung, bzw. $\langle v, L(v)\rangle$ die zweite Fundamentalform ist. (1)-(3) folgen sofort.

Der Beweis ist jetzt genau die Rechnung von Sergij Schidlowskij aus der Übung:

$$\nabla_X Y = \mathrm{proj}^{\perp}_{TF} \nabla^0_X Y = \nabla^0_X Y - \langle \nabla^0_X Y, n\rangle n.$$

Man berechnet, dass

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \langle Z, L(Y)\rangle L(X) - \langle Z, L(X)\rangle L(Y)$$

Ist nun $\{X, Y\}$ eine Orthonormalbasis, so erhält man

$$K(X, Y) = \langle \mathcal{R}(X, Y)Y, X\rangle = \langle Y, L(Y)\rangle\langle X, L(X)\rangle - \langle Y, L(X)\rangle\langle X, L(Y)\rangle = \det L.$$

Jeder sollte in der Lage sein, die konkreten Rechnungen selber auszuführen.

Man kommr übrigens auch zum Ziel, indem man F in p als Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ darstellt, die in $0 \in \mathbb{R}^2$ einen kritischen Punkt hat und die Behauptung aus der ersten Vorlesung benutzt, dass dann die Gaußkrümmung von F in p gleich der Determinante der Hessischen von f in 0 ist. Enthusiasten beweisen das dann noch. Falls Sie einer sind, vergleichen Sie danach Ihre Argumente mal mit der ersten Rechnung dieser Bemerkung...