Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2008

Abgabe 5.5.2008

Aufgabe 1
Gegeben sei die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen sie eine Matrix $P \in Gl(3, \mathbb{R})$, so dass $P^{-1}AP$ die reelle Jordansche Normalform von A realisiert.

1 P

Aufgabe 2
Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit der Eigenschaft $A^t = -A$. Zeigen Sie, dass dann das charakteristische Polynom von der Form $\chi_A(t) = \pm\, t^{n-2k} \cdot (t^2 + {\lambda_1}^2) \cdot \ldots \cdot (t^2 + {\lambda_k}^2)$ ist und dass die reelle Jordansche Normalform von A die folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & \lambda_k & & & \\ & & & -\lambda_k & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

1 P

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die Ähnlichkeitsklassen der 2×2-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, d.h. die disjunkte Zerlegung der Menge $M(2; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ in Teilmengen, mit der Bedingung, dass A und B genau dann zur selben Teilmenge gehören, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in Gl(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ gibt mit $T^{-1}AT = B$.

1 P

Bitte wenden...

Aufgabe 4
Sei $\varphi \in End(V)$ ein Endomorphismus des $\mathbb{K}$–Vektorraumes V. Wir setzen voraus, dass das Polynom vom Grad $d > 0$, $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, irreduzibel (oder auch:prim) ist, d.h. aus $p(t) = h(t)k(t)$ für Polynome $h(t), k(t) \in \mathbb{K}[t]$ folgt entweder $h(t) = cp(t)$ oder $k(t) = cp(t)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Es gelte $p(\varphi) = 0 \in End(V)$.
(1) Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ die Familie $\{v; \varphi(v); \varphi^2(v); ...; \varphi^{d-1}(v)\}$ linear unabhängig ist.
(2) Sei $U \subset V$ ein φ–invarianter Unterraum, $w \notin U$. Zeigen Sie, dass dann $W \cap U = \{0\}$ für $W := span\{w; \varphi(w); \varphi^2(w); ...; \varphi^{d-1}(w)\}$.
(3) Zeigen Sie nun, dass es Vektoren $v_1, ..., v_k \in V$ gibt, so dass
$\{v_1; \varphi(v_1); \varphi^2(v_1); ...; \varphi^{d-1}(v_1); ...; v_k; \varphi(v_k); \varphi^2(v_k); ...; \varphi^{d-1}(v_k)\}$ eine Basis von V ist. Bestimmen Sie die zu φ gehörende Matrix bezüglich dieser Basis.

1 P