Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2008

Abgabe 5.5.2008

Aufgabe 2
Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit der Eigenschaft $A^t = -A$. Zeigen Sie, dass dann das charakteristische Polynom von der Form $\chi_A(t) = \pm\, t^{n-2k} \cdot (t^2 + {\lambda_1}^2) \cdot \ldots \cdot (t^2 + {\lambda_k}^2)$ ist und dass die reelle Jordansche Normalform von A die folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & \lambda_k & & & \\ & & & -\lambda_k & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir bemerken zunächst: Ist $(A - \lambda)v = w$ so ist $(A^t + \lambda)v = -w$. Das bedeutet insbesondere: Ist $S \in Gl(n;\mathbb{R})$ mit $S^{-1}AS = J$, wobei J reelle Jordanform hat, so ist $S^{-1}A^tS = -J$. Daraus folgt $SJS^{-1} = -(S^t)^{-1}J^tS^t$ bzw.

$$(S^tS)J = -J^t(S^tS) = -((S^tS)J)^t,$$

d.h. die Matrix ist antisymmetrisch. Insbesondere verschwinden alle Diagonaleinträge. Bezeichne (a_{ij}) die (reellen) Einträge der Matrix S^tS. Man beachte, dass auf der Diagonalen von S^tS positive Zahlen stehen: $a_{jj} > 0$, da S keine Nullspalten enthält, weil invertierbar. Sei λ ein reeller Eigenwert von A, k der Index der ersten Spalte eines Jordanblocks von λ. Der $k$te Diagonaleintrag von $(S^tS)J$ ist gegeben durch λa_{kk}. Damit ist aber $\lambda = 0$. Nehmen wir an der Jordanblock hat mehr als eine Zeile. Berechne dann die Einträge mit den Indices $k, (k+1)$ bzw. $(k+1), k$ und erhalte a_{kk} bzw. 0. Wegen der Antisymmetrie von $(S^tS)J$ folgt $a_{kk} = 0$ im Widerspruch zu $a_{kk} > 0$.

Sei $\lambda = a + ib$ ein komplexer Eigenwert von A mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$, sei k wieder der Index der ersten Spalte eines zugehörigen reellen Jordankästchens. Berechne dann das $k$te und $(k+1)$te Diagonalelement von $(S^tS)J$ und erhalte $aa_{kk} - ba_{k(k+1)} = 0$ bzw. $ba_{(k+1)k} + aa_{(k+1)(k+1)} = 0$. Daraus folgt $a(a_{kk} + a_{(k+1)(k+1)}) = 0$ und folglich wegen $a_{jj} > 0$ für alle j, dass $a = 0$. Unter der Annahme, dass der zugehörige Jordanblock mehr als 2 Spalten hat errechnet man durch Vergleich der Paare folgender Elemente von $(S^tS)J$: der Eintrag mit den Indizes $(k+1), (k+2)$ mit $(k+2), (k+1)$ sowie $k, (k+3)$ mit $(k+3), k$: $a_{kk} = b(a_{(k+1)(k+2)} + a_{(k+3)k})$ und $a_{(k+1)(k+1)} = -b(a_{(k+1)(k+2)} + a_{(k+3)k})$, im Widerspruch zur Positivität beider Einträge.

2. Lösung: (unter Verwendung einfachster Eigenschaften des Skalar-Produktes)

Das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ schreibe man als $v \cdot w = v^tw$, für Spaltenvektoren v, w.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert, $v \neq 0$ Eigenvektor. Dann gilt: $\lambda v^tv = v^t(Av) = (v^tA)v = (A^tv)^tv = -(Av)^tv = -\lambda v^tv$. Da $v \neq 0$ ist $v^tv > 0$ und damit $\lambda = 0$.

Sei $\lambda = a + ib$ komplexer Eigenwert $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$. Seien v, w die "reellen Eigenvektoren", d.h. $Av = av - bw, Aw = bv + aw$. $\{v, w\}$ sind linear unabhängig. Dann gilt $v^t(Av) = av^tv - bv^tw =$

$-(Av)^t v = -av^t v + bw^t v$ und $w^t Aw = aw^t w + bw^t v = (-Aw)^t w = -aw^t w - bv^t w$ Es ergibt sich

$$2av^t v = b(w^t v + v^t w)$$
$$2aw^t w = -b(w^t v + v^t w).$$

Da $v, w \neq 0$ gilt $v^t v, w^t w > 0$ und damit, da die Vorzeichen der rechten Seiten unterschiedlich sind (oder eben Null) ergibt sich $a = 0$ als einzige Möglichkeit.

Nun bildet A den von v und w aufgespannten Unterraum (bzw. den von v aufgespannten Unterraum im Fall $\lambda = 0$) auf sich ab. Bezeichne W diesen Unterraum und $W^\perp := \{v \in V \mid w^t v = 0 \text{ für alle } w \in W\}$ den dazu orthogonalen Unterraum. Man rechnet nach, dass auch $v \in W^\perp$ auch $Av \in W^\perp$ folgt: $w^t v = 0$, für alle $w \in W$ dann $w^t(Av) = -(Aw)^t v$. Da aber $Aw \in W$ für $w \in W$ ist letzteres wieder Null. Also ist $Av \in W^\perp$. Damit kann man die Aussage über vollständige Induktion beweisen. Beim Induktions-Anfang muss man aufpassen: da $\dim(W^\perp) - \dim V = 1$ oder $= 2$ ist, braucht man den Anfang für zwei Dimensionen: 0 und 1 tun es aber.