Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2008

Abgabe 12.5.2008

Aufgabe 1

a) Seien $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die zu $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ duale Basis $\mathcal{B}^*$ des $(\mathbb{R}^3)^*$.

b) Sei $\varphi = (1, -2, 2) \in (\mathbb{R}^3)^*$. Bestimmen Sie die Koordinaten von φ bezüglich der Basis $\mathcal{B}^*$.

c) Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Basen des $\mathbb{R}^n$ mit Transformationsmatrix $T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$. Berechnen Sie die Transformationsmatrix $T_{(\mathcal{B}')^*}^{\mathcal{B}^*}$ zwischen den dualen Basen.

1 P

Aufgabe 2

Gegeben Sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie mit Hilfe der (komplexen) Jordanschen Normalform die Exponentialmatrix

$$e^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1 P

Aufgabe 3

(a) Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$ diagonalisierbar. Zeigen Sie die Existenz einer Quadratwurzel, d.h. einer Matrix $B \in M(n, \mathbb{C})$ mit

$$B^2 = A.$$

(b) Berechnen Sie die Wurzel von $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) Finden Sie eine Matrix, die keine Wurzel besitzt.

$(d)^*$ Zeigen Sie, dass jede invertierbare Matrix $A \in M(n, \mathbb{C})$ eine Wurzel besitzt.

1 P

Bitte wenden...

Aufgabe 4

Sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ ein Endomorphismus eines n-dimensionalen komplexen Vektorraums und

$$id_V + \varphi + \varphi^2 + \cdots + \varphi^k = 0$$

für ein $k \in \mathbb{N}$. Hat V eine Basis von Eigenvektoren von φ?

1 P