Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Lineare Algebra und analytische Geometrie II
Sommer 2008

Abgabe 19.05.2008

Aufgabe 1

a) Betrachte auf $\mathbb{R}^3$ die Bilinearform $f(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 + 2x_3y_3$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)^t$, $y = (y_1, y_2, y_3)^t$. Man untersuche, ob f ausgeartet ist.

b) Sei f die Bilinearform aus Aufgabenteil a). Man bestimme die Gramsche Matrix $G_S(f)$ bezüglich der Standardbasis $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$. Sei nun $S' := \{e_1 - e_2, e_2, 2e_1 + 3e_2 - e_3\}$. Wie sieht dann $G_{S'}(f)$ aus?

c) Sei $G_S(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Bestimme und skizziere alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x,x) = 0$ bzw. mit $f(x,x) = 1$.

1 P

Aufgabe 2

Sei V ein zweidimensionaler euklidischer Raum, mit Basis $\{b_1, b_2\}$ und Skalarprodukt β. Es gelte $\beta(b_1, b_1) = 9$ und $\beta(b_2, b_2) = 1$. Welche Werte kann $\beta(b_1, b_2)$ annehmen?

1 P

Aufgabe 3

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Für $D \subseteq V^*$ sei $\mathrm{KER}(D) := \bigcap_{\eta \in D} \ker(\eta)$. Zeigen Sie:

(a) Für $D \subseteq V^*$ gilt $\mathrm{Span}(D) = \{\eta \in V^* \,|\, \ker(\eta) \supseteq \mathrm{KER}(D)\}$.

(b) Die dualen Vektoren $\eta_1, \ldots, \eta_m \in V^*$ sind linear unabhängig genau dann wenn

$$\dim\Big(\bigcap_{1 \leq i \leq m} \ker(\eta_i)\Big) = n - m.$$

1 P

Aufgabe 4

Sei $\Omega \subset V$ eine nichtleere konvexe Teilmenge eines rellen Vektorraums, d.h. wenn $v, w \in \Omega$ dann gilt $sv + (1-s)w \in \Omega \, \forall s \in [0,1]$. Das Dual $\Omega^* \subset V^*$ sei dann definiert durch

$$\Omega^* = \{\alpha \in V^* | \alpha(v) \leq 1 \forall v \in \Omega\}$$

a) Zeige, dass Ω^* wieder konvex ist.

b) Beschreibe Ω^* für den Fall, dass $\Omega \subset V$ ein Untervektorraum ist sowie für den Würfel $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x_i| \leq 1\}$.

1 P