Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

# Übungsblatt 9

## Lineare Algebra und analytische Geometrie II* - Sommer 2008

### Abgabe 16.06.2008

**Aufgabe 1**
Sei $V = \mathbb{C}[X]_{\leq d}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens $d$. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen. Man betrachte

$$\beta : V \times V \to \mathbb{C},\ \beta(p,q) := \sum_{i=1}^{N} p(\alpha_i)\overline{q(\alpha_i)}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $\beta$ definiert eine Hermitesche Form auf $V$. Für eine geeignete Basis bestimmen Sie die Gramsche Matrix von $\beta$.

(b) Ist $N = d+1$, so ist $\beta$ ein Skalarprodukt auf $V$. Gilt dies auch für $N = d+2$ bzw. $N = d$?

**1 P**

**Aufgabe 2**

a) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein hermitescher Vektorraum und $\varphi \in End(V)$ ein selbstadjungierter Operator. Beweisen Sie, dass es eine orthonormale Basis von $V$ gibt, die aus Eigenvektoren von $\varphi$ besteht. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von $\varphi$ reell sind.

b) Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$ eine hermitische Matrix, d.h. $\overline{A}^T = A$. Zeigen Sie, dass dann eine unitäre Matrix $Q \in SU(n)$ existiert, so dass $\overline{Q}^T AQ$ Diagonalgestalt hat.

c) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie explizit eine Matrix $Q$ wie in b).

**1 P**

Bitte wenden...

**Aufgabe 3**

a) $V$ sei der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich $n$, wobei $n \geq 1$ gegeben ist. Bestimmen Sie Index und Rang der folgenden quadratischen Form

$$\gamma : V \to \mathbb{R}, \qquad \gamma(f) := \int_0^1 f(t)f'(t)dt.$$

b) Betrachten Sie die quadratische Form

$$\delta : V \to \mathbb{R}, \qquad \delta(f) := f(1)^2 + f(2)^2$$

Untersuchen Sie, ob es einen Automorphismus $\varphi : V \to V$ gibt, so dass $\delta = \gamma \circ \varphi$.

Hinweis: Die Aufgabe wird leichter lösbar sein, wenn Sie den Satz von Sylvester nicht verwenden, sondern einfach die Definition von Index und Rang. Können Sie das Ganze dann auf den Raum der differenzierbaren Funktionen verallgemeinern?

**1 P**

**Aufgabe 4**

Sei $V$ ein hermitescher Vektorraum, $v \in V$ ein Vektor mit $\|v\| = 1$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Wir definieren die lineare Abbildung

$$\varphi : V \to V, \qquad \varphi(x) = x + \lambda \langle x, v \rangle v$$

a) Berechnen Sie $\|\varphi(x)\|^2$ für alle $x \in V$.

b) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{C}$ für die $\varphi$ eine unitäre Abbildung ist.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\varphi$.

**1 P**

Insgesamt: **4 P**