Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 10

Lineare Algebra und analytische Geometrie I - Sommer 2008

Abgabe 23.06.2008

Aufgabe 1
Sei V ein Hermitischer Vektorraum mit der Hermitischen form $\langle , \rangle$, und sei $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung.

Sei $\phi : V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung und $\mu = \min\{\lambda : \lambda \text{ ein Eigenwerte von } \phi\}$ und $\nu = \max\{\lambda : \lambda \text{ ein Eigenwert von } \phi\}$.

Zeigen Sie, dass

$$\mu\|x\|^2 \leq \langle \phi(x), x \rangle \leq \nu\|x\|^2 \text{ für alle } x \in V.$$

Aufgabe 2
For any matrix $A \in Mat(n, \mathbb{C})$, prove the following:

a) $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$,

b) if A is hermitian, $\det(A) \in \mathbb{R}$, and

c) if A is unitary, $|\det(A)| = 1$.

1 P

Aufgabe 3

a) Zeige, dass eine orientierungserhaltende Bewegung der euklidischen Ebene entweder eine Drehung um einen Punkt der Ebene oder eine Translation ist.

b) Konstruiere eine Bewegung der euklidischen Ebene, die keine Translation ist und keinen Fixpunkt hat.

c) Begründe, dass die Bewegung

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine Drehung ist und bestimme das Drehzentrum, sowie den Drehwinkel.

1 P

Bitte wenden...

Aufgabe 4
Zeige, dass jede abstandserhaltende Abbildung ϕ der Sphäre $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ die Einschränkung einer orthogonalen Abbildung ist, d.h. es gibt ein $\Phi \in O(n)$ mit $\Phi|_{S^{n-1}} = \phi$. (Hinweis: Wie muss die Abbildung Φ aussehen, damit sie eine lineare Forsetzung von ϕ sein kann? Stelle eine Vermutung auf und zeige für diese die Behauptung.)

1 P

Die folgende Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe. Für diejenigen Studenten, die bisher weniger als 50% der bis jetzt möglichen Punkte erhalten haben, bietet sich damit die Möglichkeit, den Punktestand zu verbessern. Wir behalten uns vor, nur bei diesen Studenten die Lösungen zu korrigieren.

Aufgabe 5
Sei V ein endlichdimesionaler hermitischer Vektorraum und $f \in End(V)$ ein unitär Endomorphismus. Zeige, dass

a) $\ker(f - id_V) = im(f - id_V)^{\perp}$, und

b) falls $(f - id_V)^2 = 0$, dann $f = id_V$.

1 P

Insgesamt: **5/4 P**