Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 13

Lineare Algebra und analytische Geometrie II* - Sommer 2008

Abgabe 14.07.2008

Aufgabe 1
Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ und $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in KP^n \mid x_i \neq 0\}$. Überlegen Sie, ob das Komplement von U_i, $KP^n \setminus U_i$, eine Hyperebene in KP^n ist und zeigen Sie:
(a) Durch

$$U_i \to K^n,\ [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}),\ i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

ist eine bijektive Abbildung erklärt.
(b) $\bigcup_{i=0}^{n} U_i = KP^n$.
(c) Die Abbildung

$$\iota_i : K^n \to KP^n,\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_i : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n],\ i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

ist injektiv und es gilt $\iota_i(K^n) = U_i$

1 P

Aufgabe 2
Sei φ eine Projektivität einer projektiven Ebene $P(V)$, die eine Gerade G in $P(V)$ punktweise festlässt. Beweisen Sie, dass es ein $p_0 \in P(V)$ gibt, so dass für jedes $p \in P(V)$ die Punkte p_0, p und $\varphi(p)$ auf einer Geraden liegen (G heißt Achse und p_0 heißt Zentrum von φ).

1 P

Aufgabe 3
In der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ seien die Punkte $A = [7:5:6], B = [2:4:5], C = [2:3:4]$ und $D = [7:2:3]$ gegeben.
(a) Zeigen Sie, dass A, B, C und D ein nichtentartetes Viereck bilden.
(b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch AB und CD bzw AC und BD.
Betrachten Sie nun die Fano-Ebene, $\mathbb{F}_2 P^2$.
(c) Wieviele Punkte muss man wählen, um eine Quadrik, d.h. insbesondere das nicht verschwindene homogene quadratische Polynom eindeutig zu bestimmen?
(d) Beschreiben Sie die Menge aller entarteteten Quadriken, die mindestens soviel Punkte wie unter (b) enthalten.
(e) Beschreiben Sie die Menge aller Quadriken in der Fano-Ebene.
Hinweis: Für (c)-(e) dürfen Sie auch "geometrisch" argumentieren.

1 P

Bitte wenden...

Aufgabe 4
Die Elemente $f \in PGL(2, \mathbb{C})$ sind von der Form

$$f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1,\ [z_1, z_2] \mapsto [az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2],\ ad - bc \neq 0$$

Identifiziert man die Punkte des affinen Unterraums $\{[z, 1] \mid z \in \mathbb{C}\}$ mit $\mathbb{C}$ und $[1, 0]$ mit ∞, so gilt in diesen affinen Koordinaten:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}\ .$$

Für die Punkte, wo der Nenner verschwindet, ist der Wert $\infty \in \mathbb{C}P^1$ und für $z = \infty$ ist der Wert $\frac{a}{c}$, falls $c \neq 0$ oder ∞, falls $c = 0$.
Zeigen Sie, dass man jedes solche f durch Hintereinanderausführung von Translationen $z \mapsto z + b, b \in \mathbb{C}$, Drehstreckungen $z \mapsto az, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und Kreisspiegelungen $z \mapsto \frac{1}{z}$ erhält.

1 P

Aufgabe 5 (Punktesammelaufgabe)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $w \in V$, $w \neq 0$. Die Hyperebene $E = w^\perp$ bestimmt die zwei Halbräume E^+ und E^- in V, wobei E^+ der Halbraum ist, in dem w liegt.
(a) Charakterisieren Sie die Elemente der beiden Halbräume.
(b) Sei $\{v_1, \ldots, v_k\}$ eine Familie von Vektoren in E^+ mit $\langle x_i, x_j\rangle \leq 0$ für $i \neq j$. Zeigen Sie: $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ist linear unabhängig.

1 P

Insgesamt: **4 + 1 P**