Lösung zu Ü-Blatt 3, A.4

Sei $\varphi \in End(V)$, $p(\varphi)=0$ mit φ prim

$\Rightarrow$ $m_\varphi \sim p$ aber normiert.

① $\forall v \in V$, $\{v, \varphi(v), \dots \varphi^{d-1}(v)\}$ Lin unabhä

Setzen wir voraus, $\{v, \varphi(v), \dots\}$ Lin abhä.

ie $\exists a_j$ / $\sum_{j=0}^{d-1} a_j \varphi^j(v) = 0$, ie $q(\varphi)(v) = 0$

mit $q(t) = \sum_{j=0}^{d-1} a_j t^j$

Euklidisches Algo $\rightsquigarrow$ $\exists r, s$ polynomen /

$$pr + sq = ggT(p,q) = 1$$

$\Rightarrow$ $r(\varphi)\, p(\varphi) + s(\varphi)\, q(\varphi) = \mathbb{1}$

angewendet auf v : $r(\varphi)\cancel{p(\varphi)}(v) + s(\varphi)\underbrace{q(\varphi)(v)}_{0} = \mathbb{1}v = v$

$\Rightarrow$ $v = 0$.

② U : φ-inv Unterraum, $w \notin U$, $W = \langle w, \varphi(w) \dots \varphi^{d-1}(w) \rangle$

$\Rightarrow$ $U \cap W = \{0\}$

U: φ-inv $\Leftrightarrow$ $\varphi(U) \subset U$ ie $\forall x \in U \Rightarrow \varphi(x) \in U$

- Aus ① $\rightsquigarrow$ $W = \text{Dim } d$
- <u>W ist φ-inv</u> $\quad \forall j \in [0, d-1] \quad \varphi(\varphi^j(w)) = \varphi^{j+1}(w)$

Falls $j < d-1 \Rightarrow \in W$

$j = d-1 \Rightarrow \varphi^d(w) \in ? W$

benutzen $P(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{d} p_i \varphi^i = 0$

$$\Rightarrow \varphi^d = -\frac{1}{p_d} \sum_{j=0}^{d-1} p_j \varphi^j$$

$$\Rightarrow \varphi^d(w) = -\frac{1}{p_d} \sum_{j=0}^{d-1} p_j \varphi^j(w) \in W .$$

ausgenommen $\exists \; v \in U \cap W$

betrachte $\{v, \varphi(v) \dots \varphi^{d-1}(v)\} \overset{(1)}{\rightsquigarrow}$ Lin indep

Sei $E = \langle v, \varphi(v) \dots \varphi^d(v) \rangle$ = d-dim Unterraum.

- als $v \in W$, sind alle $\varphi^j(v) \in W$
  und W φ-inv

$$\Rightarrow E \subset W$$

Aber, gleiche Dim. $\Rightarrow E = W \Rightarrow W \subset U$

- als $v \in U$, φ-inv $\Rightarrow$ alle $\varphi^j(v) \in U$

$\Rightarrow E \subset U \Rightarrow W \subset U \Rightarrow w \in U$ widerspruch!

③ Wähle ein $v_1 \in V$

$\rightsquigarrow V_1 = \text{span}(v_1, \varphi(v_1) \dots \varphi^{d-1}(v_1))$

V_1 ist φ-inv und ① $\Rightarrow \dim V_1 = d$

falls $d < n = \dim V$

$\Rightarrow$ wähle $v_2 \notin V_1$

$\rightarrow \quad V_2 = \operatorname{span}\left(v_2, \varphi(v_2) \dots \varphi^{d-1}(v_2)\right)$, $\dim d$

V_1 φinv mit (2) $\Longrightarrow$ $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

$\Rightarrow \quad V_1 \oplus V_2$ $\dim 2d$, φ-inv

falls $2d < n$ ....

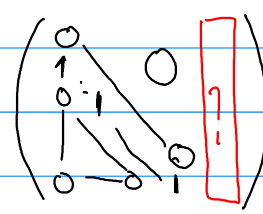
am Ende: $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$

mit $V_j = \operatorname{Span}\left(v_j \dots \varphi^{d-1}(v_j)\right)$, $\dim = d$

und $\varphi(V_j) \subset V_j$

$\Rightarrow$ Blockmatrix $\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \; \varphi_k \end{pmatrix}$

$A: \underline{\varphi_j}$: $\quad v_j \to \varphi(v_j) \longrightarrow \dots \quad \varphi^{d-1}(v_j)$



$$\varphi\left(\varphi^{d-1}(v_j)\right) = \varphi(v_j) = -\frac{1}{p_d} \sum_{k=0}^{d-1} p_k \, \varphi^k(v_j)$$, wo $P(\varphi) = 0$

$$\boxed{} = \begin{pmatrix} -p_0/p_d \\ \vdots \\ -p_{d-1}/p_d \end{pmatrix}$$